

БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

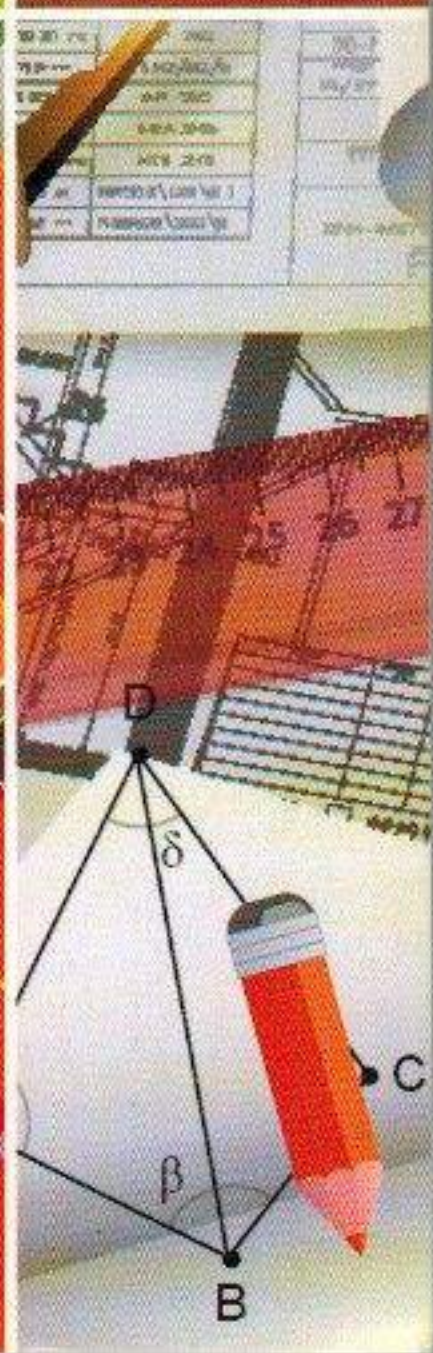
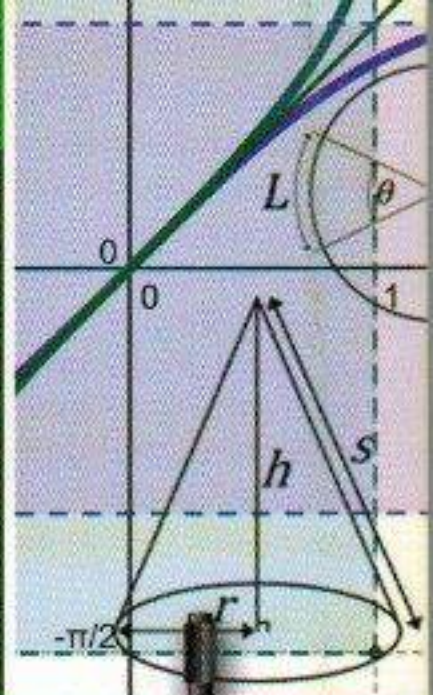
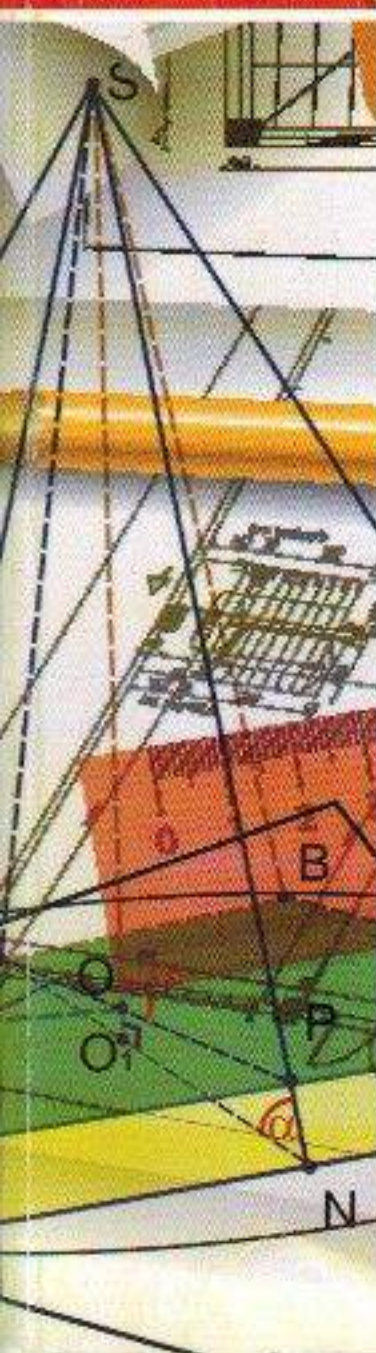
А.В. Бобровская

НАГЛЯДНАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ

В ТЕОРИИ ЗАДАЧАХ ЧЕРТЕЖАХ

$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{SS_1})$$

ФЕНИКС

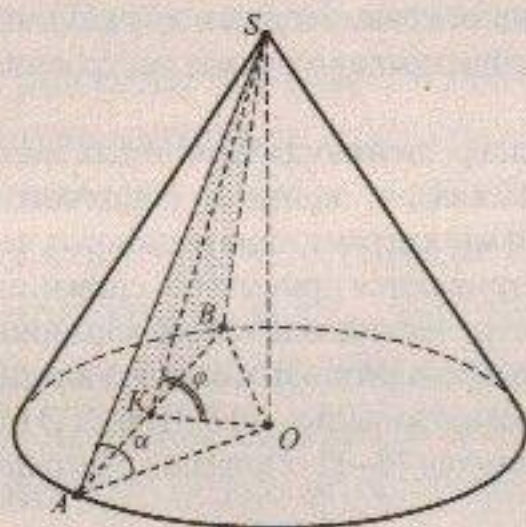
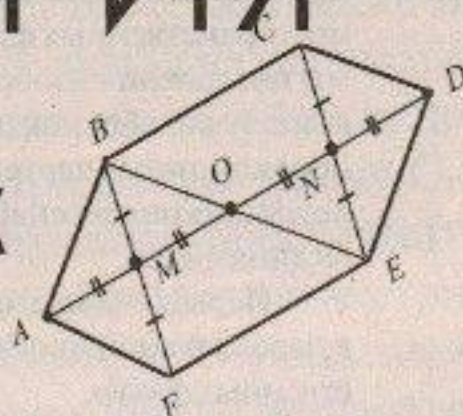
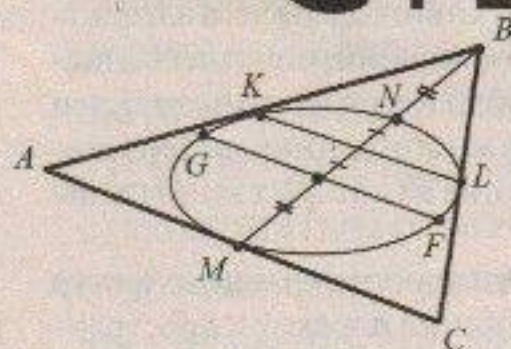


Серия «Библиотека школьника»

А.В. БОБРОВСКАЯ

НАГЛЯДНАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ

**В ТЕОРИИ,
ЗАДАЧАХ, ЧЕРТЕЖАХ**



Ростов-на-Дону

«Феникс»

2013

УДК 373.167.1:514

ББК 22.14я72

КТК 444

Б72

Рецензенты:

Баврин Иван Иванович — академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории информатики и дискретной математики Московского государственного педагогического университета;

Голубятников Владимир Петрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета.

Бобровская А.В.

Б72 Наглядная стереометрия в теории, задачах, чертежах / А.В. Бобровская. — Ростов н/Д: Феникс, 2013. — 167 с. — (Библиотека школьника).

ISBN 978-5-222-20431-3

Учебное пособие представляет собой практическое руководство по курсу стереометрии общеобразовательной школы. В нем представлен материал, посвященный теории изображений пространственных фигур в произвольной параллельной проекции. В книге содержатся алгоритмы построения изображений многогранников, круглых тел и их комбинаций, описаны основные случаи обоснования выполнения чертежей, представлен подробный анализ возможностей проекционных чертежей для решения задач на построение сечений многогранников. Теоретический материал снабжен большим количеством иллюстраций, многие из которых выполнены «в динамике».

Первая глава посвящена основам теории изображений плоских и пространственных фигур в параллельной проекции, содержит алгоритмы построения изображений плоских и пространственных фигур.

Вторая глава посвящена решению позиционных задач на проекционных чертежах. Здесь даются понятия позиционных задач, полного и неполного изображений, приводятся приемы и методы построения сечений многогранников на полных чертежах.

В третьей главе рассматриваются приемы обоснования выполнения чертежей, приводятся примеры решения стереометрических задач на проекционных чертежах.

Школьникам пособие позволит подготовиться к решению задач В-9 и С-2 из Открытого банка заданий по математике (www.mathtge.ru) ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА. Пособие рассчитано на учащихся 10–11-х классов, учителей математики и студентов педагогических вузов.

ISBN 978-5-222-20431-3

УДК 373.167.1:514
ББК 22.14я72

© Бобровская А.В., 2013

© Оформление: ООО «Феникс», 2013

ВВЕДЕНИЕ

Практические потребности повседневной жизни человека требуют приобретения навыков изображения плоских и пространственных геометрических фигур. Постановка технического задания перед рабочим не может ограничиться словесным описанием формы или размеров предмета в силу того, что такие описания не обладают нужной точностью. Кроме того, чтобы описать оригинал, необходимо обладать хорошо развитым пространственным воображением, способностью представлять мельчайшие детали фигуры-оригинала. Умение «читать» чертеж, способность описать оригинал по его изображению необходимы и квалифицированному рабочему, и мастеру, и инженеру, и строителю.

Изображения пространственных фигур в школьном образовании облегчают понимание сложного теоретического материала, помогают его усвоению, позволяют найти решение задачи. Построение чертежа способствует развитию пространственного воображения, формирует способность воспринимать пространственные образы, позволяет оперировать с фигурами, изображенными на чертеже. С введением в школах Единого государственного экзамена умение решать задачу на изображение приобретает особое значение, поскольку для получения высокого балла необходимо решить стереометрическую задачу С-2 с развернутым ответом. При выполнении этого задания нужно не просто найти ответ на вопрос задачи, надо обосновать выводы с помощью свойств геометрических фигур, сопровождая решение чертежами, выполненными безукоризненно. Трудности при выполнении чертежей пространственных фигур обусловлены содержанием в них различного рода условностей: на чертеже искажаются меры углов и длины отрезков фигуры-оригинала, могут пересекаться линии, в оригинале не имеющие общих точек, и т.д. Решение стереометрической задачи, конечно же, может предполагать построение наброска изображаемого объекта, выполненного «от руки», но завершением этого процесса должно быть построение чертежа, выполненного по четко определенным правилам и с помощью чертежных инструментов.

Современные учебные пособия по геометрии в силу объективных причин не нацелены на формирование умений строить проекционные чертежи. Содержание вопроса недостаточно разработано в педагогической и методической литературе, требуя дальнейшего развития.

Предлагаемое учебное пособие посвящено проблеме выполнения изображений на проекционном чертеже, построенном в произвольной параллельной

проекции, а также изучению роли таких изображений в решении позиционных и метрических задач.

В книге содержатся алгоритмы построения изображений многогранников, круглых тел и их комбинаций, описаны различные случаи обоснования выполнения чертежей, представлен подробный анализ возможностей проекционных чертежей для решения задач на построение и вычисление. Теоретический материал снабжен большим количеством иллюстраций, многие из которых выполнены «в динамике».

Первая глава содержит основы теории изображений плоских и пространственных фигур в параллельной проекции, описывает алгоритмы построения изображений пространственных фигур и их комбинаций, сопровождается большим количеством иллюстраций.

Вторая глава посвящена решению позиционных задач на полных чертежах. Здесь даются понятия позиционных задач, полного и неполного изображений, приводятся приемы решения задач на построение и вычисление на полных чертежах. Особое внимание уделено описанию методов построения сечений многогранников на полных чертежах.

В третьей главе рассматриваются приемы обоснования выполнения чертежей, приводятся примеры решения стереометрических задач на полных чертежах.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Принятые в книге символические обозначения:

(AB) — прямая, проходящая через точки A, B ;

$[AB]$ — отрезок с концами A и B ;

$\triangle ABC$ — треугольник с вершинами A, B, C ;

(ABC) — плоскость, содержащая точки A, B, C ;

$\angle(ABC, DEF)$ — двугранный угол двух плоскостей (ABC) и (DEF) ;

$\angle(AB)$ — двугранный угол с ребром (AB) ;

$\angle(AB, DEF)$ — угол прямой AB с плоскостью DEF ;

$\perp$ — перпендикуляр;

$\parallel$ — параллельность;

$\in$ — знак принадлежности;

$\subset$ — знак включения.

ГЛАВА 1

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

1.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Познакомимся с основными вопросами теории изображений фигур в параллельной проекции. Выберем в пространстве некоторую плоскость Π — назовем ее плоскостью проекций — и пусть точка M' — любая точка пространства (рис. 1).

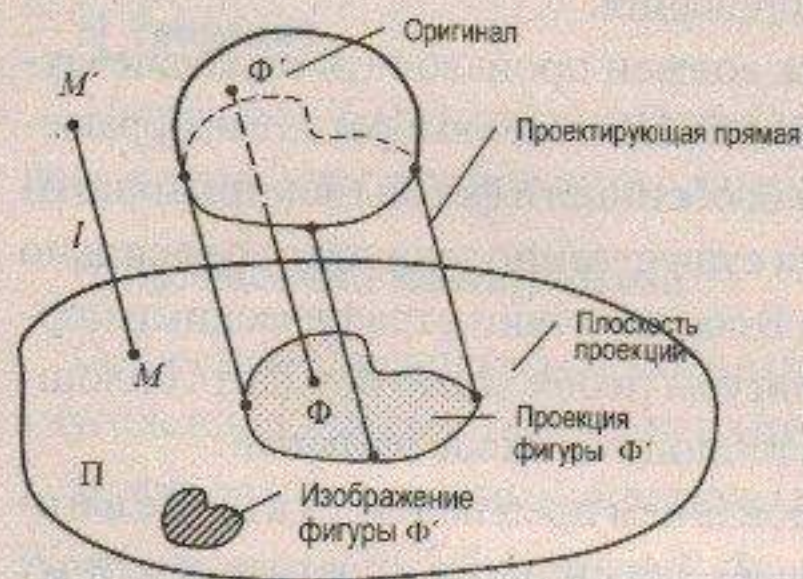


Рис. 1

Проведем через точку M' прямую l , не параллельную плоскости Π (будем называть ее *проектирующей прямой*). Обозначим символом M точку пересечения l и Π . Точку M назовем *параллельной проекцией точки M'* . Спроектируем все точки фигуры Φ' на плоскость Π и получим фигуру Φ , которую назовем *параллельной проекцией фигуры Φ'* (рис. 1). Фигуру Φ' назовем *оригиналом*, а процесс получения фигуры Φ — *проектированием*. Любую фигуру плоскости Π , подобную фигуре Φ , назовем *изображением* фигуры

Φ' . Таким образом, *изображением* фигуры-оригинала является не только ее проекция, но и любая фигура, *подобная* проекции.

Перечислим основные *свойства параллельного проектирования* в предположении, что данные прямые или отрезки не параллельны проектирующей прямой.

1. Проекцией прямой является прямая.
2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
3. Проекцией отрезка является отрезок.

4. Параллельное проектирование сохраняет простое отношение трех точек (в частности, середина отрезка проектируется в середину его проекции).

5. Параллельное проектирование сохраняет отношение длин параллельных отрезков.

Построение изображения фигуры-оригинала включает следующие этапы: а) строим оригинал или фигуру, подобную оригиналу; б) находим свойства фигуры, которые сохраняются при параллельном проектировании (так называемые инварианты); в) строим изображение с учетом найденных инвариантов.

Выбор плоскости проекции, направления проектирования, положения фигуры-оригинала будет зависеть от роли, отводимой чертежу.

К проекционному чертежу предъявляются три основных требования, в соответствии с которыми он должен быть: *1) верным; 2) наглядным; 3) легко выполнимым.*

Первое требование считаем выполненным, если изображение построено с учетом свойств 1–5 параллельного проектирования.

Второе требование означает, что чертеж должен производить то же впечатление, что и изображаемая фигура. Требование обязывает выбрать то изображение, которое наилучшим образом отражает особенности формы фигуры-оригинала. Наглядность проекционного чертежа существенно зависит от правильно выделенных видимых и невидимых линий. В соответствии с графическими нормами видимые элементы изображаемой фигуры необходимо обводить сплошными линиями, а невидимые — штрихами толщиной, вдвое меньшей.

Третье требование достигается использованием предлагаемых в книге алгоритмических предписаний построения чертежей основных пространственных фигур.

1.2. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

Рассмотрим примеры построения изображений плоских фигур в произвольной параллельной проекции. Роль плоскости проекций будет играть плоскость чертежа, а плоскость, содержащую фигуру-оригинал, будем считать произвольно расположенной в пространстве. Проектирующую прямую выберем также произвольно, так, чтобы она не была параллельна плоскости проекций. Фигуру-оригинал изобразим без искажения формы. Полученные таким образом проек-

ции назовем произвольными параллельными проекциями. Результаты проектирования могут существенно зависеть от выбора аппарата проектирования, мы вправе выбрать такое изображение фигуры, которое является наиболее наглядным и удобным для решения на нем конкретной задачи на вычисление.

а) Треугольник

Любой треугольник плоскости проекций может служить изображением данного треугольника. Другими словами, изображением треугольника (равностороннего, равнобедренного, прямоугольного) является *треугольник произвольной формы*.

б) Параллелограмм (в частности, квадрат, прямоугольник, ромб)

Любой *параллелограмм* может быть принят за изображение данного параллелограмма (в том числе квадрата, прямоугольника, ромба).

в) Трапеция

Изображением трапеции является *трапеция*, отношение оснований которой равно отношению оснований оригинала.

г) Правильный шестиугольник

Существует несколько способов построения изображения правильного шестиугольника. Рассмотрим один из них, содержащий наименьшее число шагов.

Пусть дан правильный шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ с центром O' (рис. 2). Заметим, что $F'B'C'E'$ — прямоугольник, и начнем построение изображения с

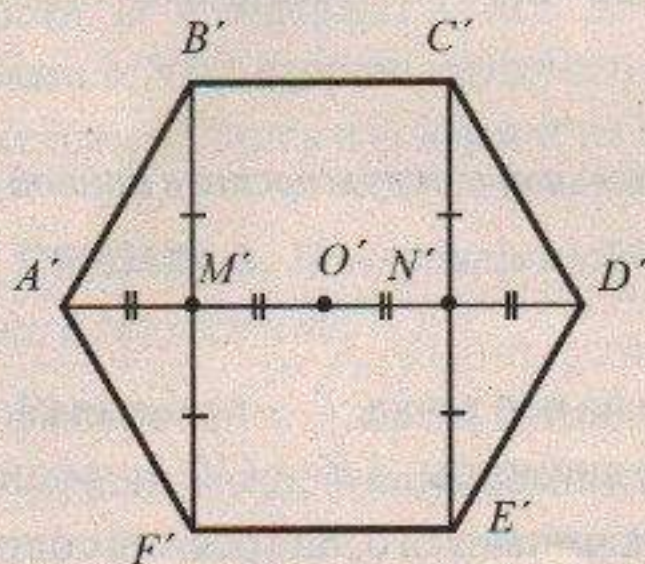


Рис. 2

параллелограмма $FBCE$ (рис. 3). Останется получить изображения двух точек — A' и D' . Учтем следующие свойства: 1) прямая $A'D'$ содержит точки M' и N' — середины отрезков $B'F'$ и $C'E'$ соответственно;

$$2) A'M' = M'O' = O'N' = N'D'.$$

Изображения точек A и D строим следующим образом: проведем среднюю линию MN параллелограмма $FBCE$, найдем ее середину O и на продолжении отрезка MN от-

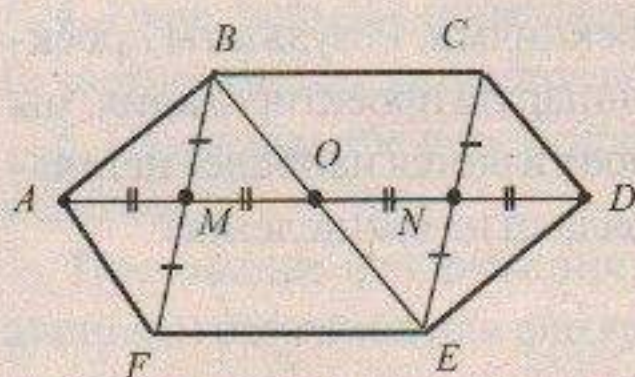


Рис. 3

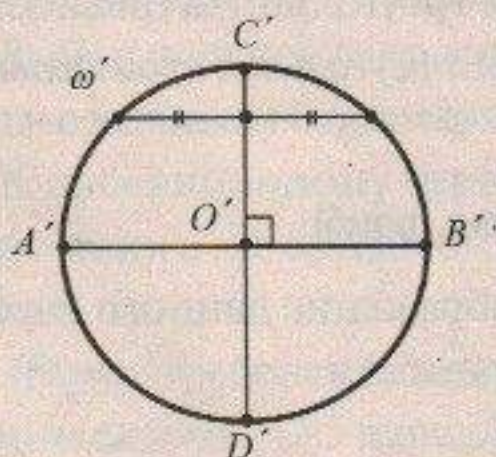


Рис. 4

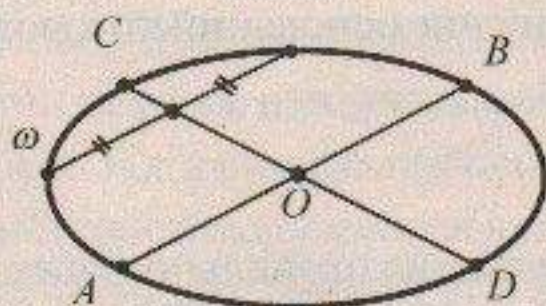


Рис. 5

ложим отрезки AM и DN , равные OM . Соединив полученные изображения вершин, закончим построения.

д) Окружность

Изображением окружности в параллельной проекции является эллипс, центр которого является изображением центра окружности. Рассмотрим окружность ω' с центром O' и два взаимно перпендикулярных диаметра $A'B'$ и $C'D'$ (рис. 4).

Диаметр $A'B'$ изобразится некоторым диаметром AB эллипса ω (рис. 5). Каждый из диаметров $A'B'$ и $C'D'$ окружности делит пополам хорды, параллельные другому. Эти свойства сохраняются при параллельном проектировании, поэтому изображением диаметра $C'D'$ окружности ω' будет такой диаметр CD эллипса ω , который делит хорды, параллельные AB , пополам.

Диаметры AB и CD эллипса называют сопряженными. Итак, перпендикулярные диаметры окружности изобразятся сопряженными диаметрами эллипса.

Приведем примеры построения изображений часто встречающихся комбинаций окружности и многоугольников.

ПРИМЕР 1. Построить изображение касательной к окружности в данной на ней точке.

Решение.

Пусть ω' — данная окружность, A' — данная на ней точка, l' — искомая касательная (рис. 6). Проведем перпендикулярные диаметры $A'B'$ и $C'D'$ и увидим, что l' параллельна $C'D'$. Построения (рис. 7) начинаются с построения сопряженных диаметров AB и CD эллипса ω .

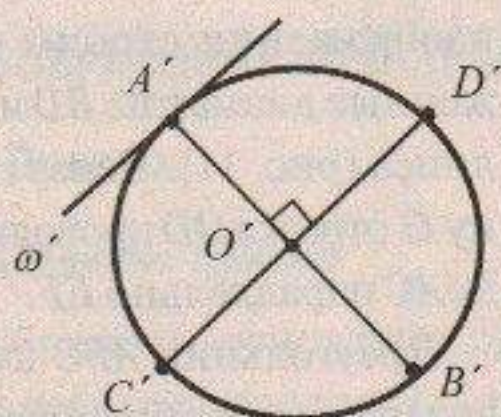


Рис. 6

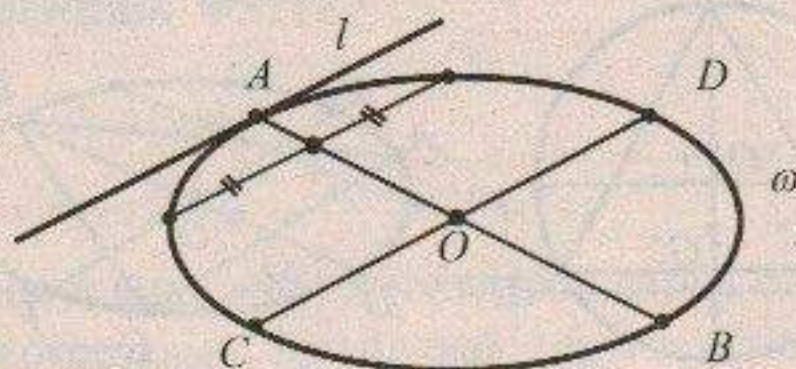


Рис. 7

ПРИМЕР 2. Построить изображение квадрата, описанного около окружности.

Решение.

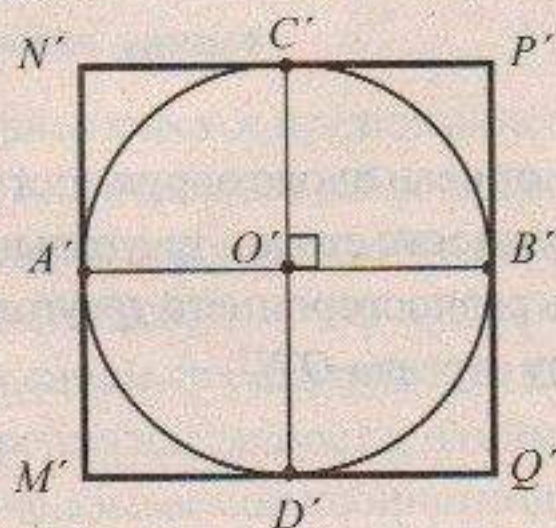


Рис. 8

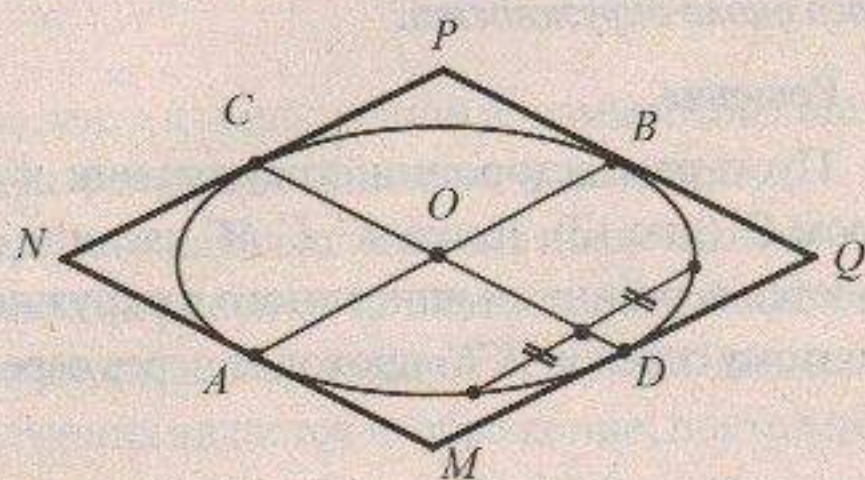


Рис. 9

Пусть $M'N'P'Q'$ — квадрат, описанный около окружности. Стороны квадрата соответственно параллельны перпендикулярным диаметрам $A'B'$ и $C'D'$ окружности ω' и содержат их концы (рис. 8). На изображении получим параллелограмм $MNPQ$, стороны которого соответственно параллельны сопряженным диаметрам эллипса и содержат их концы (рис. 9).

ПРИМЕР 3. Построить изображение равностороннего треугольника, вписанного в окружность.

Решение.

Воспользуемся рисунком 10. Пусть равносторонний треугольник $A'B'C'$ вписан в окружность ω' с центром O' . Проведем перпендикулярные диаметры $B'D'$ и $E'F'$, тогда отрезок $A'C'$ проходит через точку G' — середину отрезка $O'D'$. На

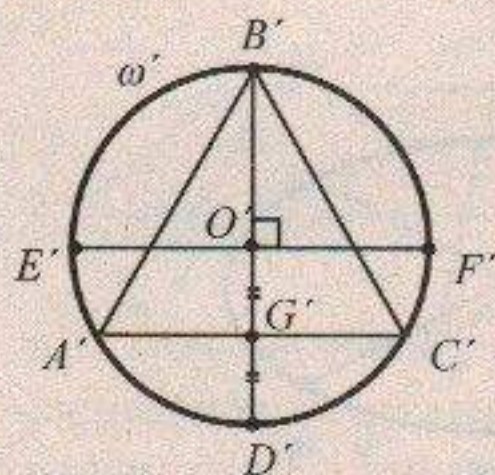


Рис. 10

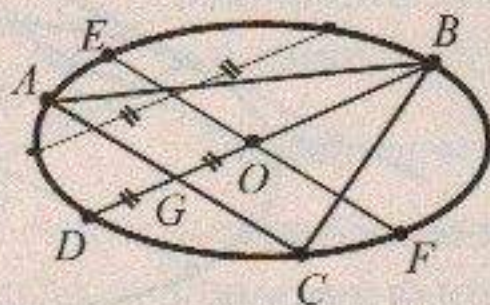


Рис. 11

изображении строим сопряженные диаметры BD и EF эллипса (рис. 11). Через середину G отрезка OD проводим хорду AC параллельно EF .

Треугольник ABC вместе с эллипсом изображают правильный треугольник, вписанный в окружность.

ПРИМЕР 4. Построить изображение равностороннего треугольника, описанного около окружности.

Решение.

Пусть равносторонний треугольник $A'B'C'$ описан около окружности с центром O' (рис. 12). Точки K', L', M' касания окружности сторон треугольника являются вершинами вписанного в окружность равностороннего треугольника, поэтому отрезок $K'L'$ проходит через середину отрезка $O'N'$.

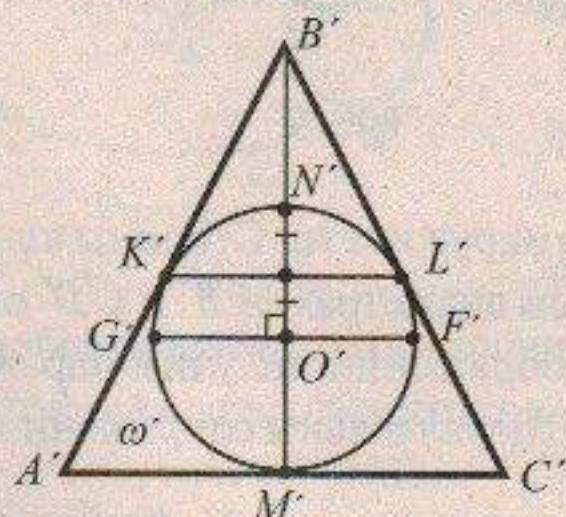


Рис. 12

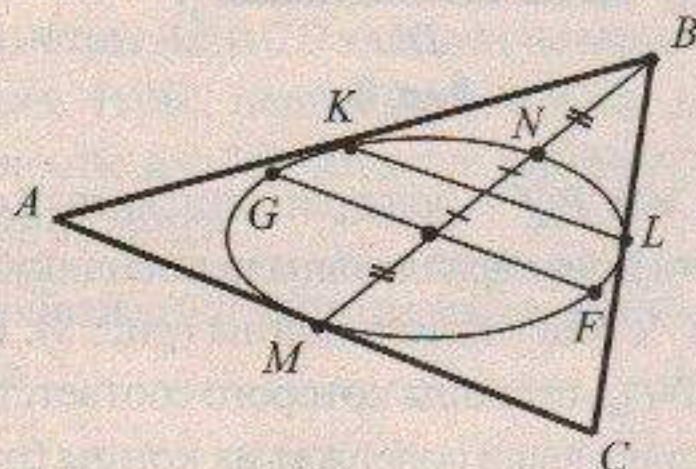


Рис. 13

На изображении построим сопряженные диаметры MN и GF эллипса ω (рис. 13). На продолжении диаметра MN откладываем отрезок $NB = ON$. Через середину отрезка ON проводим хорду KL параллельно GF , получаем точки касания K и L . Строим прямые BK и BL и на пересечении с прямой AC , проходящей через M параллельно GF , получаем две оставшиеся вершины A и C треугольника ABC .

1.3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

1.3.1. Призма

а) Наклонная призма

Изображаем основание призмы в виде многоугольника, затем боковые ребра — равными и параллельными отрезками. Третий шаг — другое основание. Заключительный этап — выделяем видимые и невидимые линии. Заметим, что общепринято изображать боковое ребро наклонной призмы *непараллельным* боковым краям чертежного листа. На рисунке 14 изображен наклонный параллелепипед.

б) Прямая призма

Алгоритмическое предписание то же, что и для наклонной призмы, с той лишь разницей, что боковое ребро проводим параллельно боковым краям листа.

Наглядное и верное изображение прямого параллелепипеда представлено на рисунке 15. Заметим, что предложенное на рисунке 15 изображение является изображением любого прямого параллелепипеда, в частности, куба. Однако, с точки зрения наглядности, одним из лучших является изображение, построенное в так называемой кабинетной проекции.

1.3.2. Пирамида

Изображаем основание пирамиды в виде многоугольника, затем высоту пирамиды — *вертикальным отрезком*. Выбираем вершину пирамиды, изображаем боковые ребра. Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунке 16 изображена произвольная пирамида $SABCD$, положение высоты SO которой не определено условием задачи.

Однако в большинстве случаев положение основания высоты пирамиды, точки O , определено условием задачи. В частности, если пирамида правильная, то O — центр основания. На рисунке 17 изображена правильная треугольная пирамида. Особо выделим такие пирамиды, у которых все ребра или все грани равнонаклонны к плоскости основания, а также пирамиды, у которых боковое ребро или две грани перпендикулярны к плоскости основания. Положение высоты у таких пирамид подробно исследовано в главе 3 настоящего пособия.

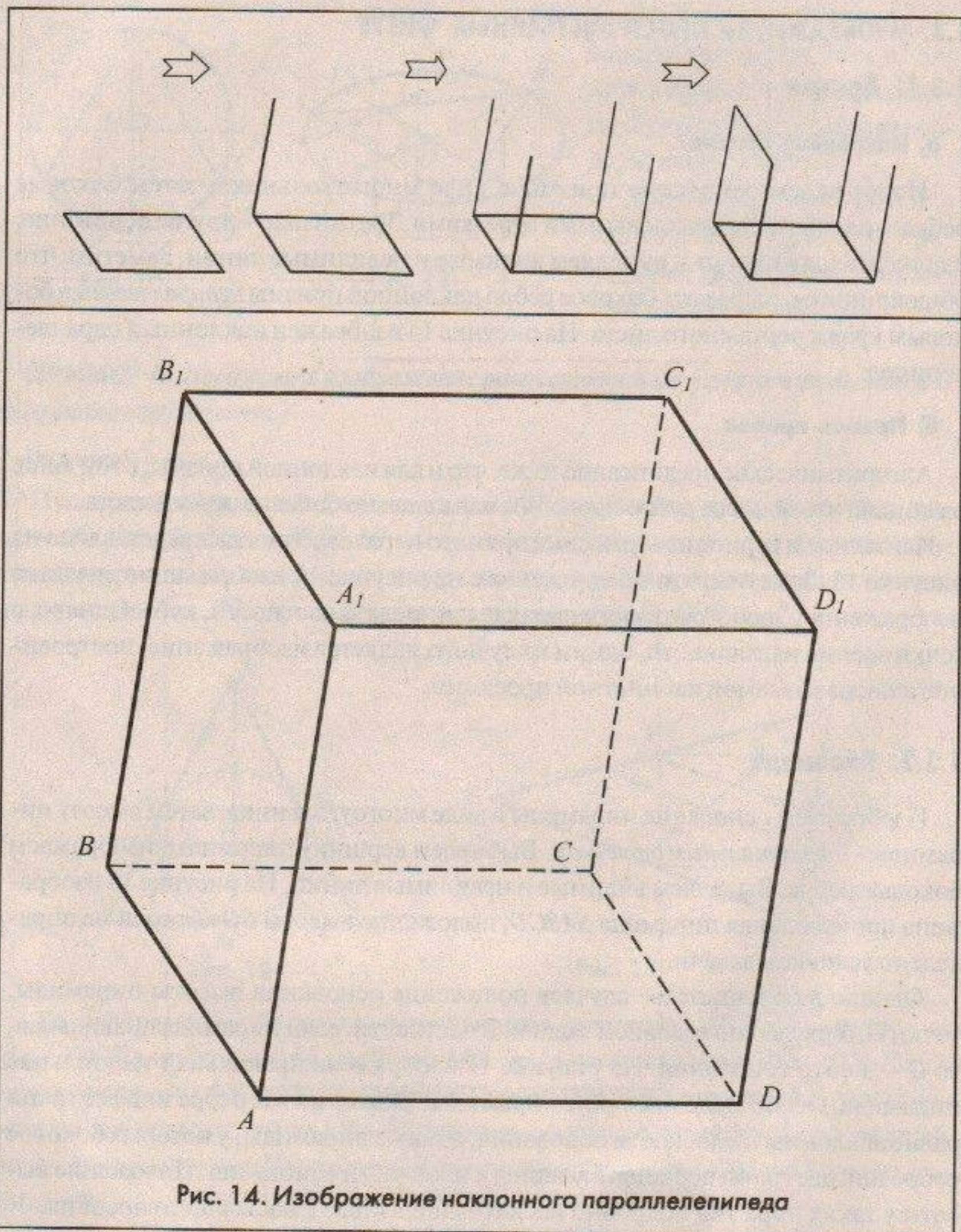


Рис. 14. Изображение наклонного параллелепипеда

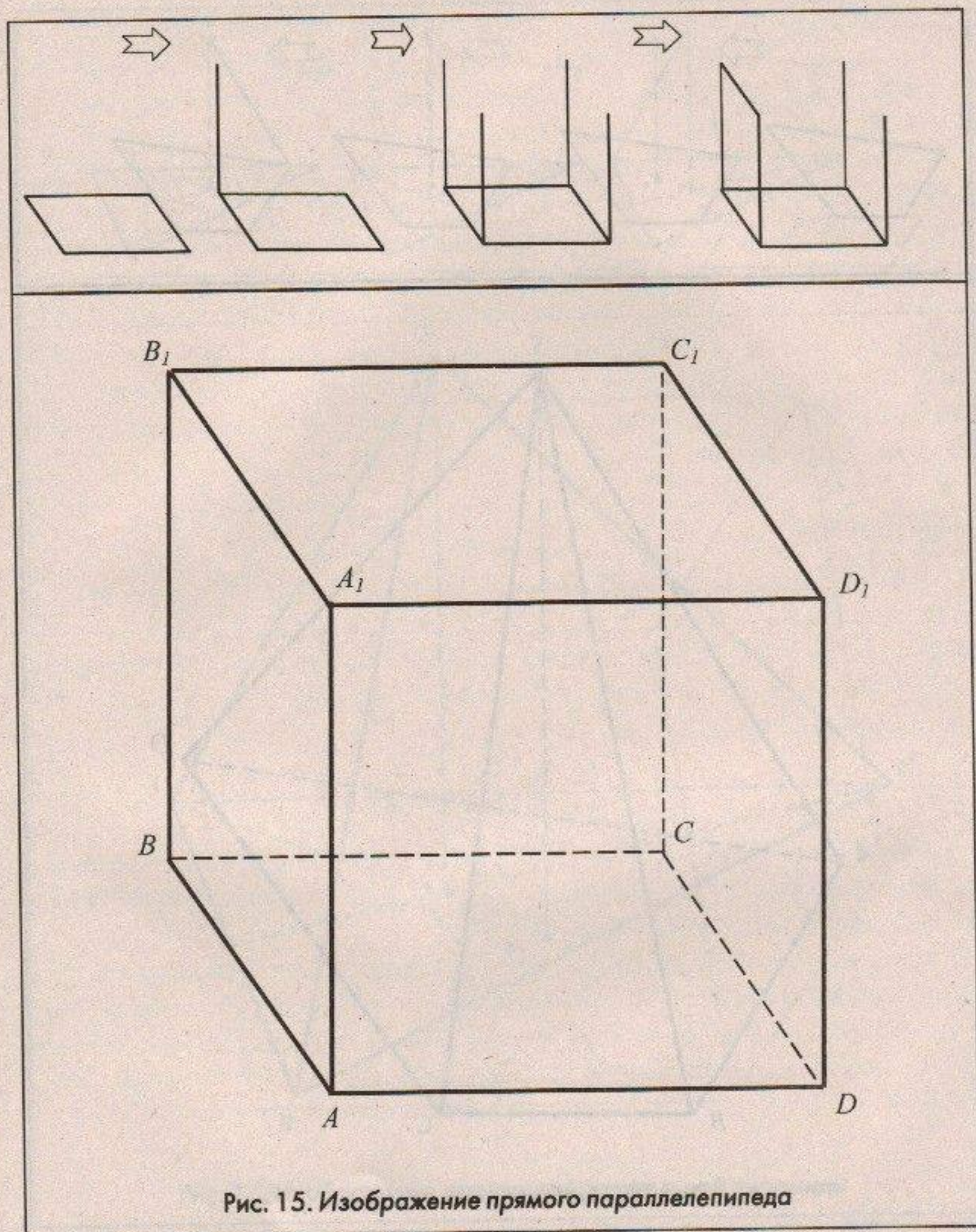


Рис. 15. Изображение прямого параллелепипеда

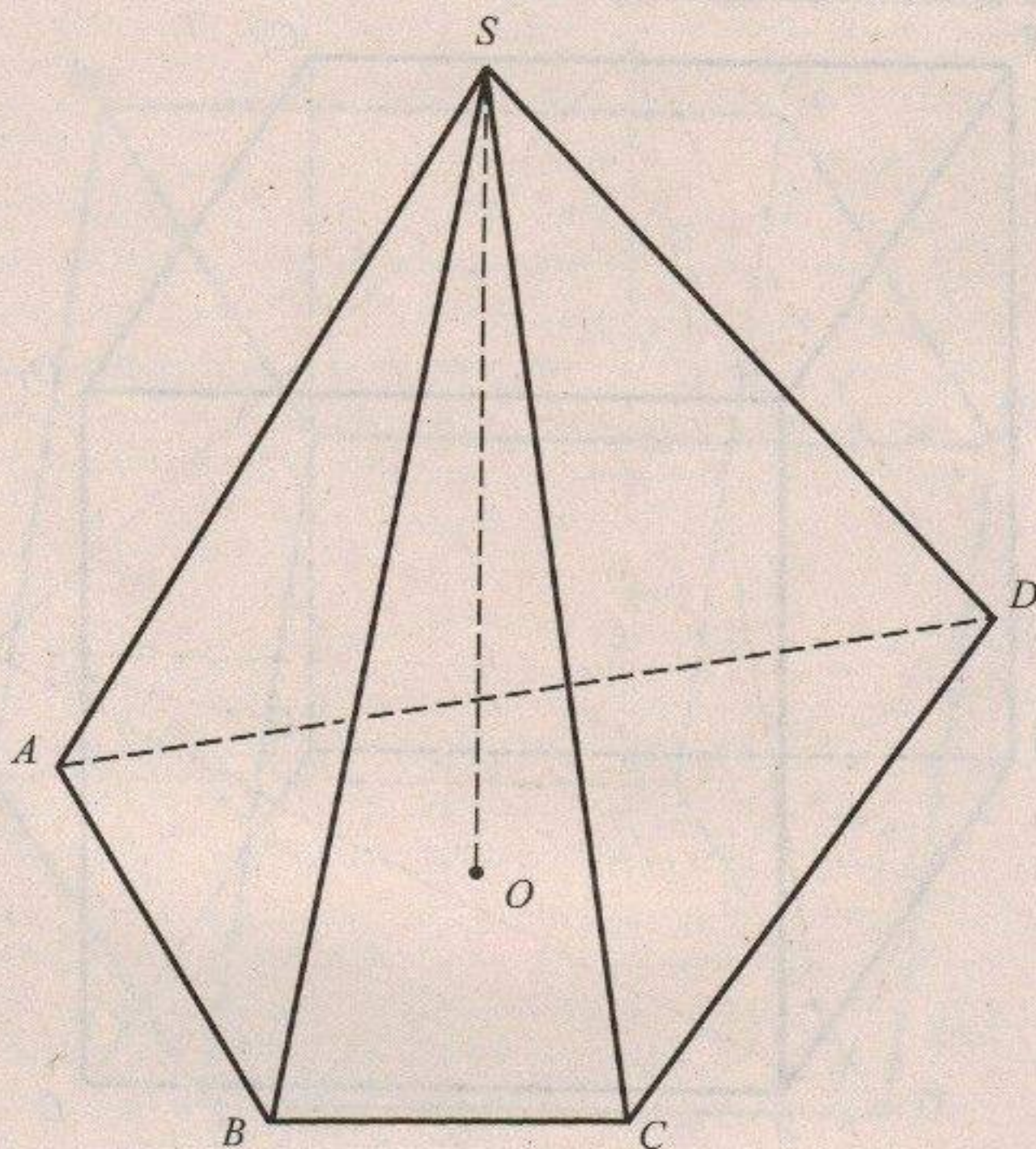
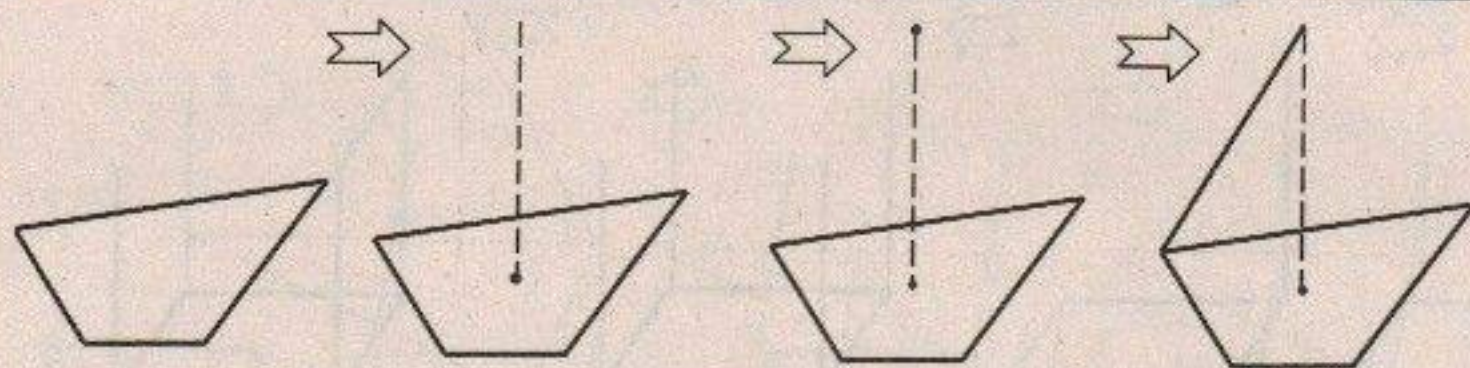


Рис. 16. Изображение пирамиды

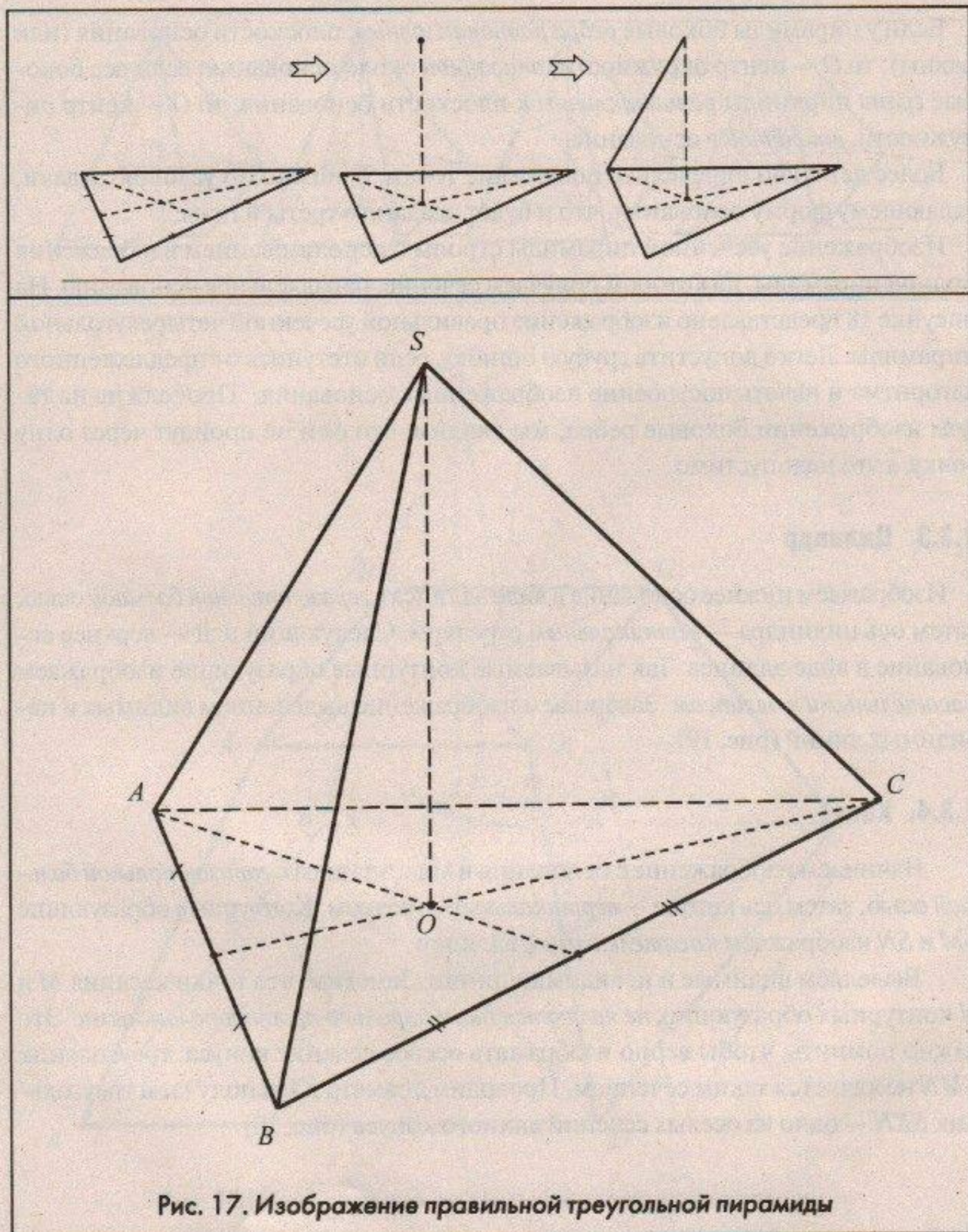


Рис. 17. Изображение правильной треугольной пирамиды

Если у пирамиды боковые *ребра равнонаклонны* к плоскости основания (или равны), то O — центр окружности, *описанной* около основания; если все боковые *границы* пирамиды *равнонаклонны* к плоскости основания, то O — центр окружности, *вписанной* в основание.

Более детально определить положение точки O можно по условию задачи, задающему форму основания, что и будет сделано в третьей главе.

Изображение усеченной пирамиды строим с использованием изображения полной пирамиды, на котором получаем сечение, параллельное основанию. На рисунке 18 представлено изображение правильной усеченной четырехугольной пирамиды. Легко допустить грубую ошибку, если отступить от предложенного алгоритма и начать построение изображения с основания. Продолжив на таком изображении боковые ребра, мы увидим, что они не пройдут через одну точку, а это недопустимо.

1.3.3. Цилиндр

Изображаем нижнее основание в виде эллипса с *горизонтальной* большой осью, затем ось цилиндра — *вертикальным* отрезком. Следующий шаг — верхнее основание в виде эллипса. Так называемые контурные образующие изображаем *касательными к эллипсам*. Завершаем изображение выделением видимых и невидимых линий (рис. 19).

1.3.4. Конус

Начинаем изображение с основания в виде эллипса с *горизонтальной* большой осью, затем ось конуса — *вертикальным* отрезком. Контурные образующие SM и SN изображаем *касательными к эллипсу*.

Выделяем видимые и невидимые линии. Заметим, что точки касания M и N контурных образующих *не являются диаметрально противоположными*. Это важно помнить, чтобы верно изображать осевое сечение конуса: треугольник SMN не является таким сечением. Проводим диаметр KN и получаем треугольник SKN — одно из осевых сечений данного конуса (рис. 20).

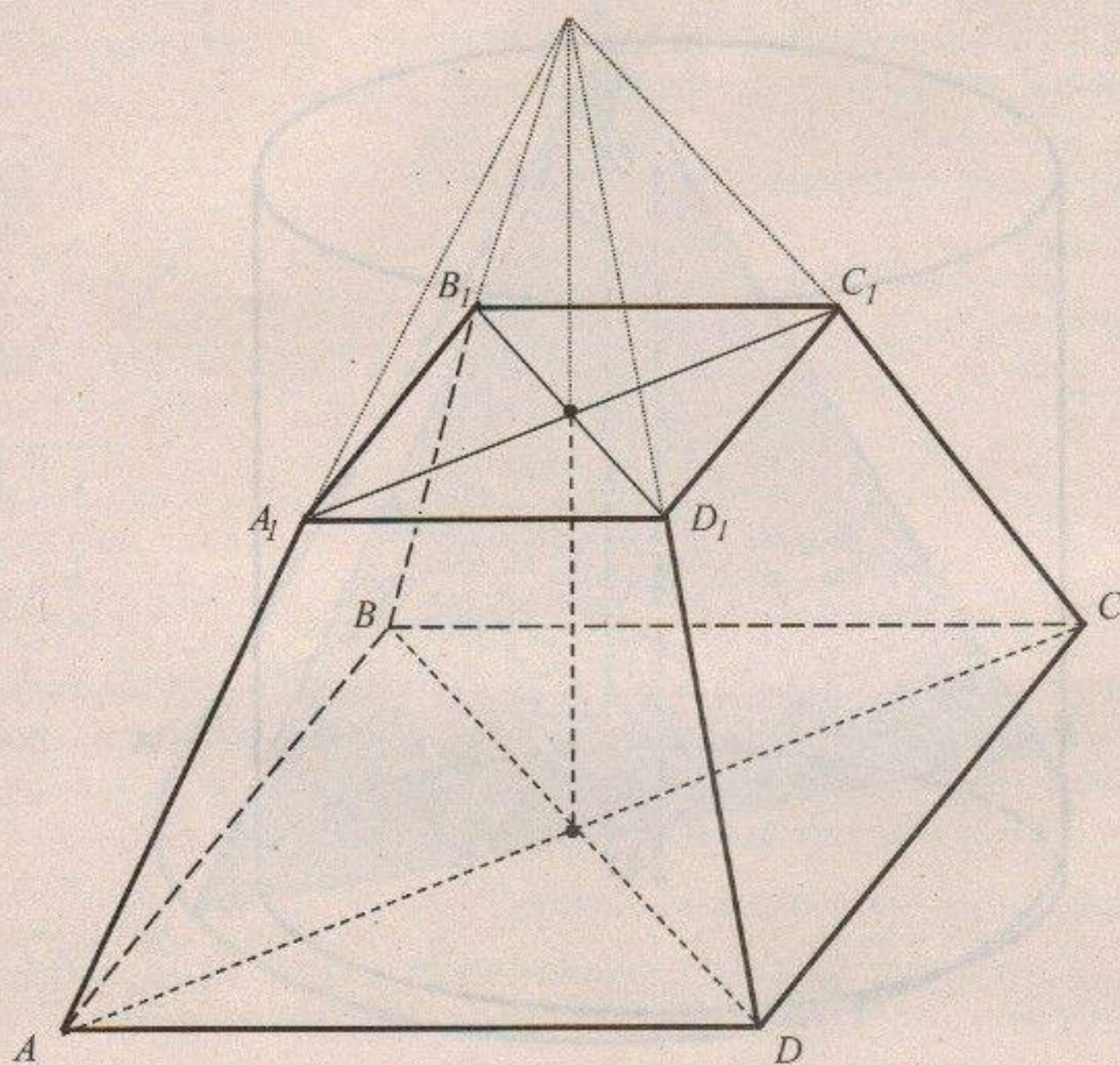
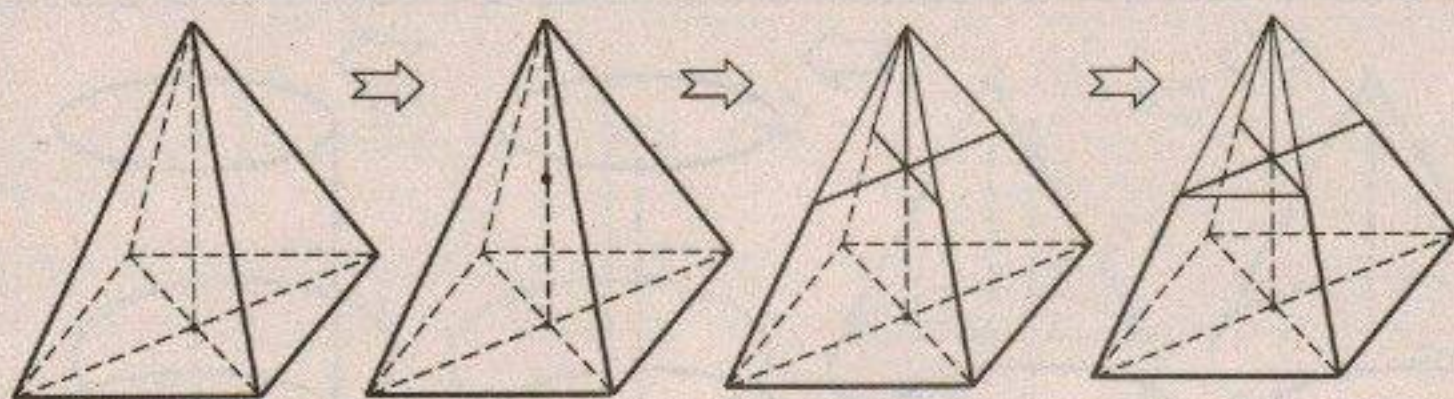


Рис. 18. Изображение правильной усеченной пирамиды

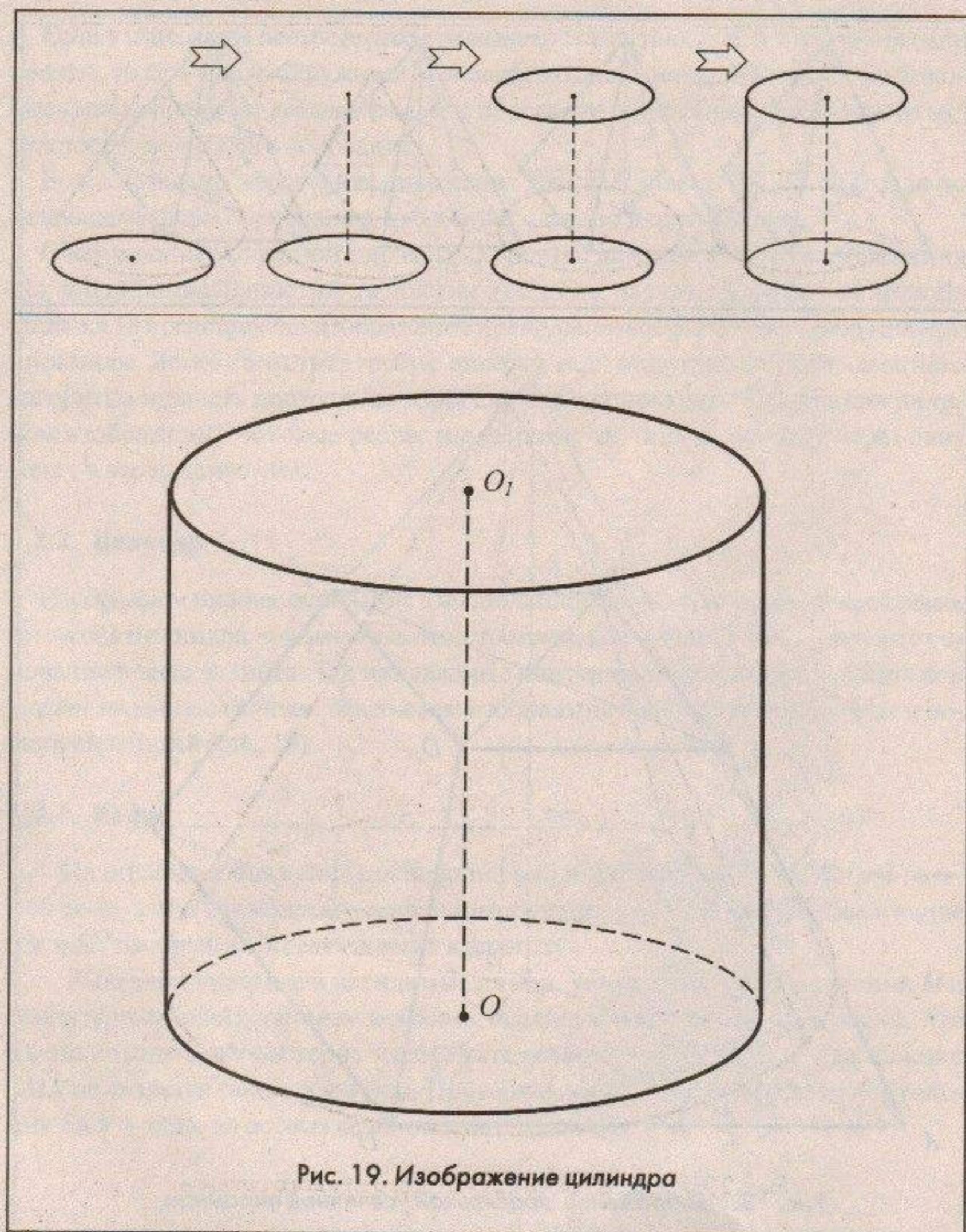


Рис. 19. Изображение цилиндра

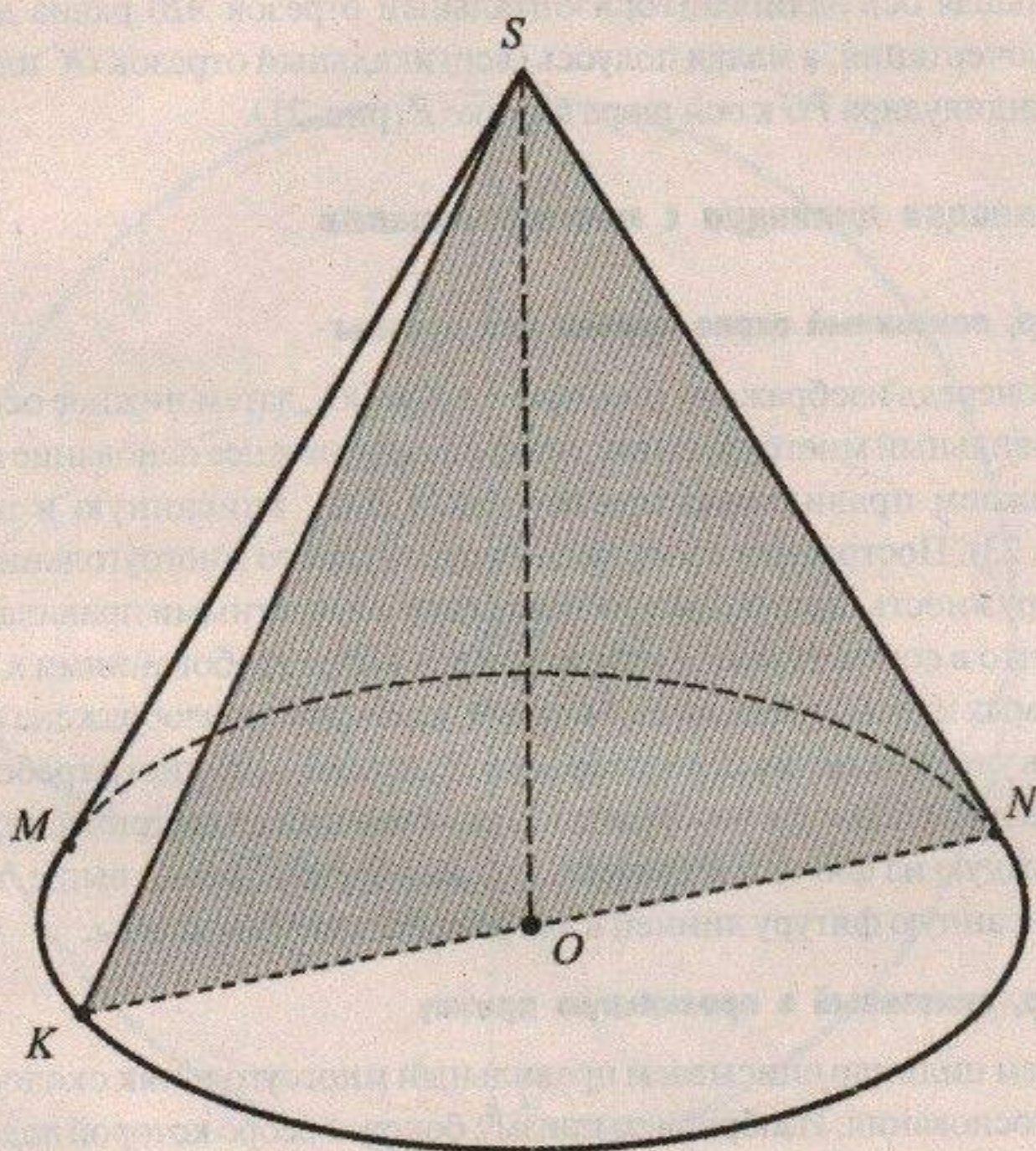
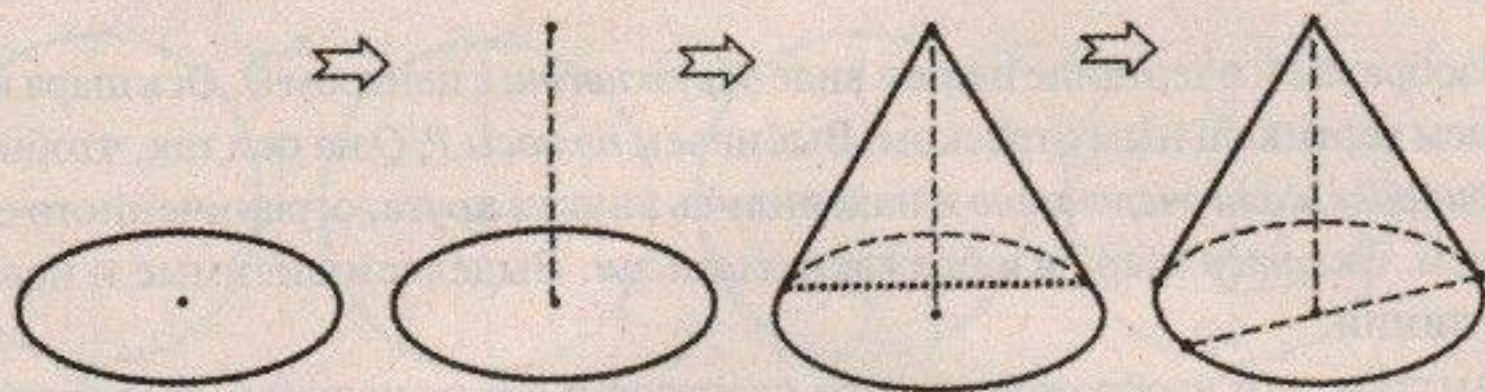


Рис. 20. Изображение конуса и его осевого сечения

1.3.5. Шар

Изображаем очертание шара в виде *окружности* с центром O . Ось шара изображаем вертикальным отрезком. Выбираем *полюсы* P, Q на оси так, чтобы они *не принадлежали очертанию* и находились внутри круга, ограниченного очертанием. *Экватор* шара изображаем *эллипсом*. Выделяем видимые и невидимые линии.

Заметим, что изображение шара строится в ортогональной проекции, что обуславливает зависимость длин осей экватора от положения полюсов на оси, а именно: большая ось эллипса (горизонтальный отрезок AB) равна диаметру окружности очертания, а малая полуось (вертикальный отрезок OC или OD) — длине перпендикуляра PG к оси шара в точке P (рис. 21).

1.3.6. Комбинации цилиндра с многогранниками

а) Цилиндр, описанный около правильной призмы

В первую очередь изображаем цилиндр с осью OO_1 , затем нижнее основание призмы (правильный многоугольник, вписанный в нижнее основание цилиндра). Изображаем правильную призму $ABCA_1B_1C_1$, вписанную в цилиндр (рис. 22, рис. 23). Построение изображения правильного многоугольника, вписанного в окружность, проводим в соответствии с известными правилами.

Заметим, что в соответствии с изложенными выше требованиями к изображению видимых и невидимых линий призма должна быть изображена штрихами. Однако в учебных целях целесообразно отступить от данного требования и использовать иной подход к изображению комбинаций геометрических фигур, а именно: каждую из фигур изображать так, как было описано выше, выделяя при этом описанную фигуру линией в два раза большей толщины.

б) Цилиндр, вписанный в правильную призму

Изображаем цилиндр описываем правильный многоугольник около верхнего (нижнего) основания. Изображаем призму, боковое ребро которой *параллельно и равно* оси цилиндра. Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунках 24 и 25 изображен цилиндр, вписанный в правильную призму.

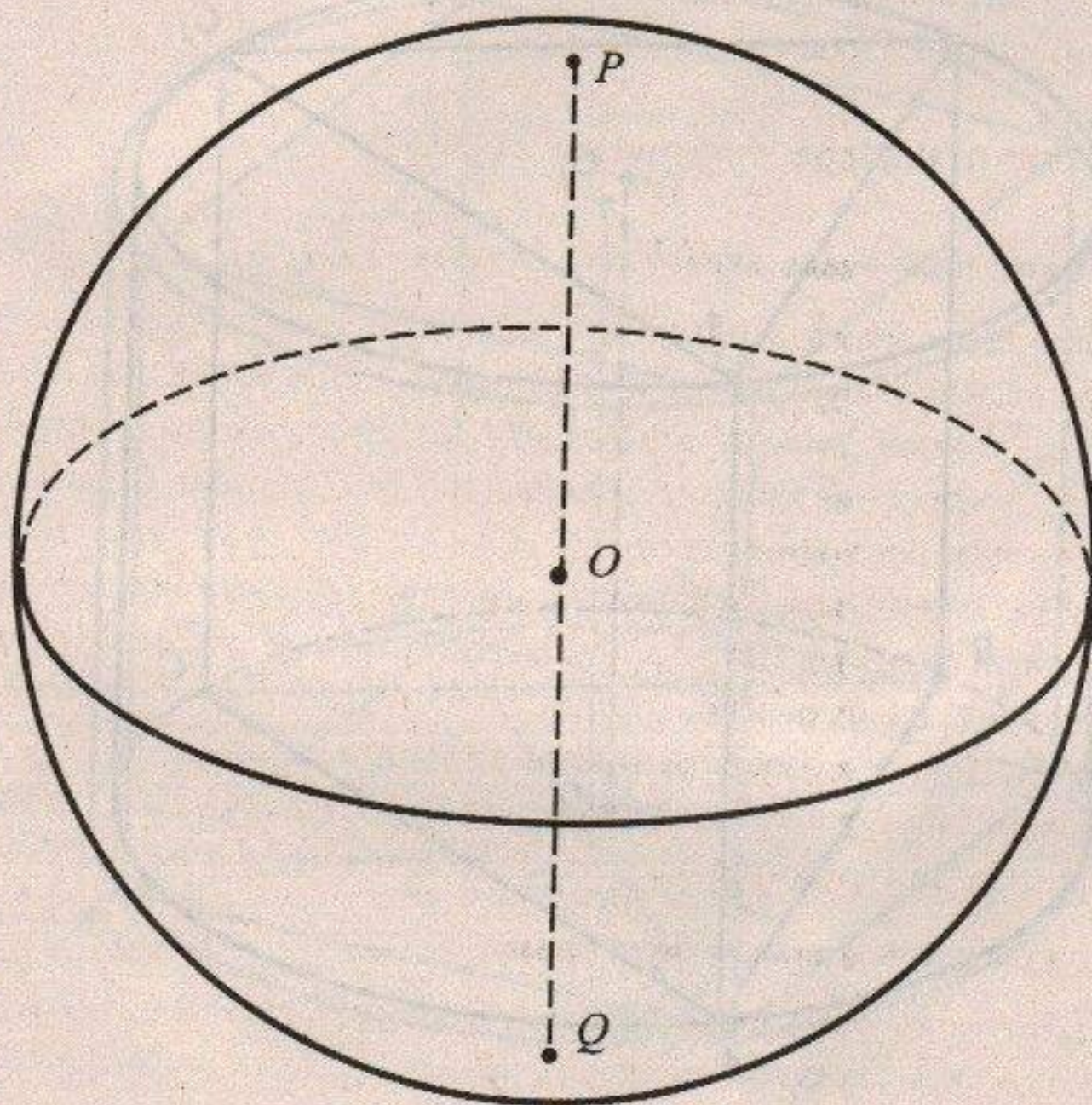
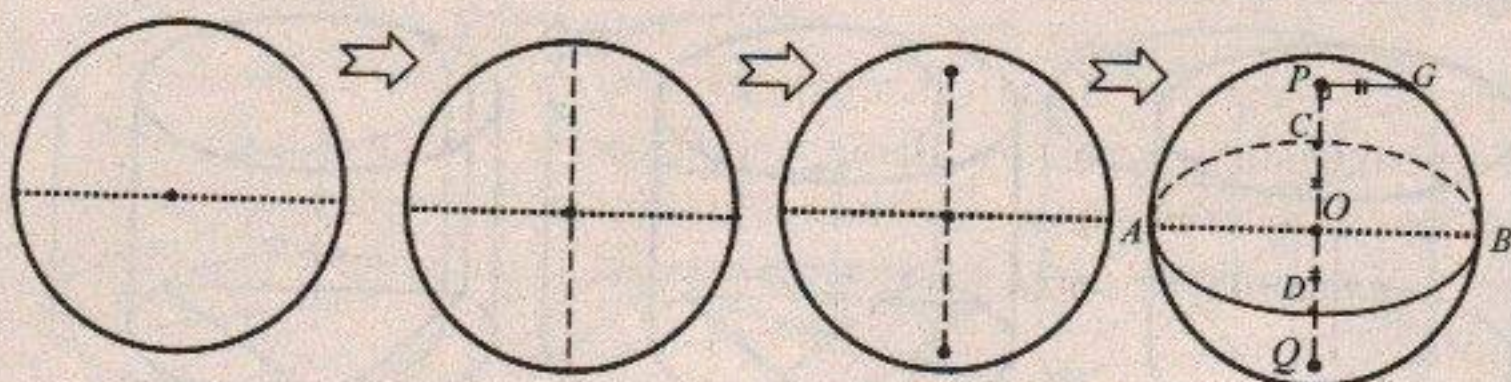


Рис. 21. Изображение шара

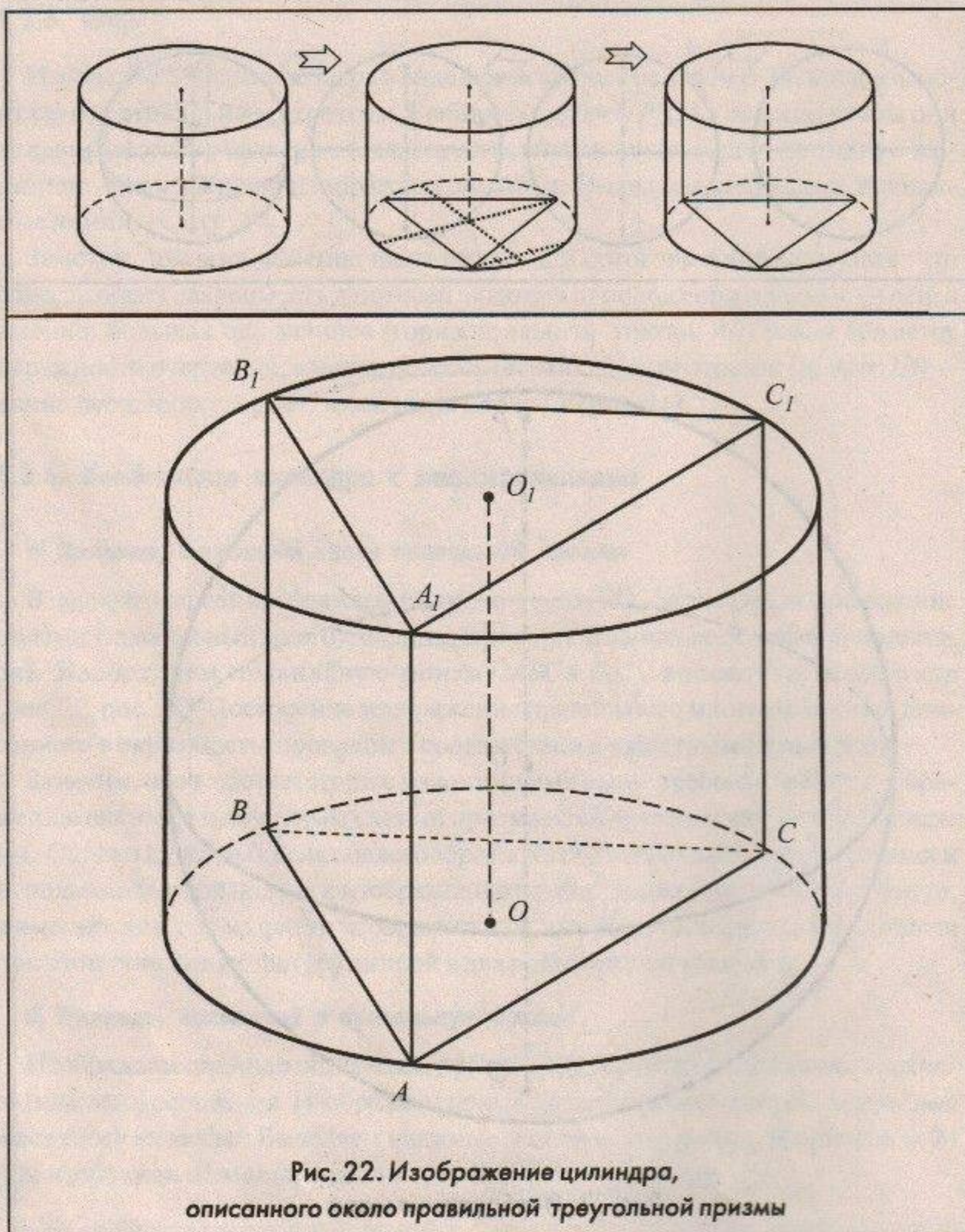


Рис. 22. Изображение цилиндра,
описанного около правильной треугольной призмы

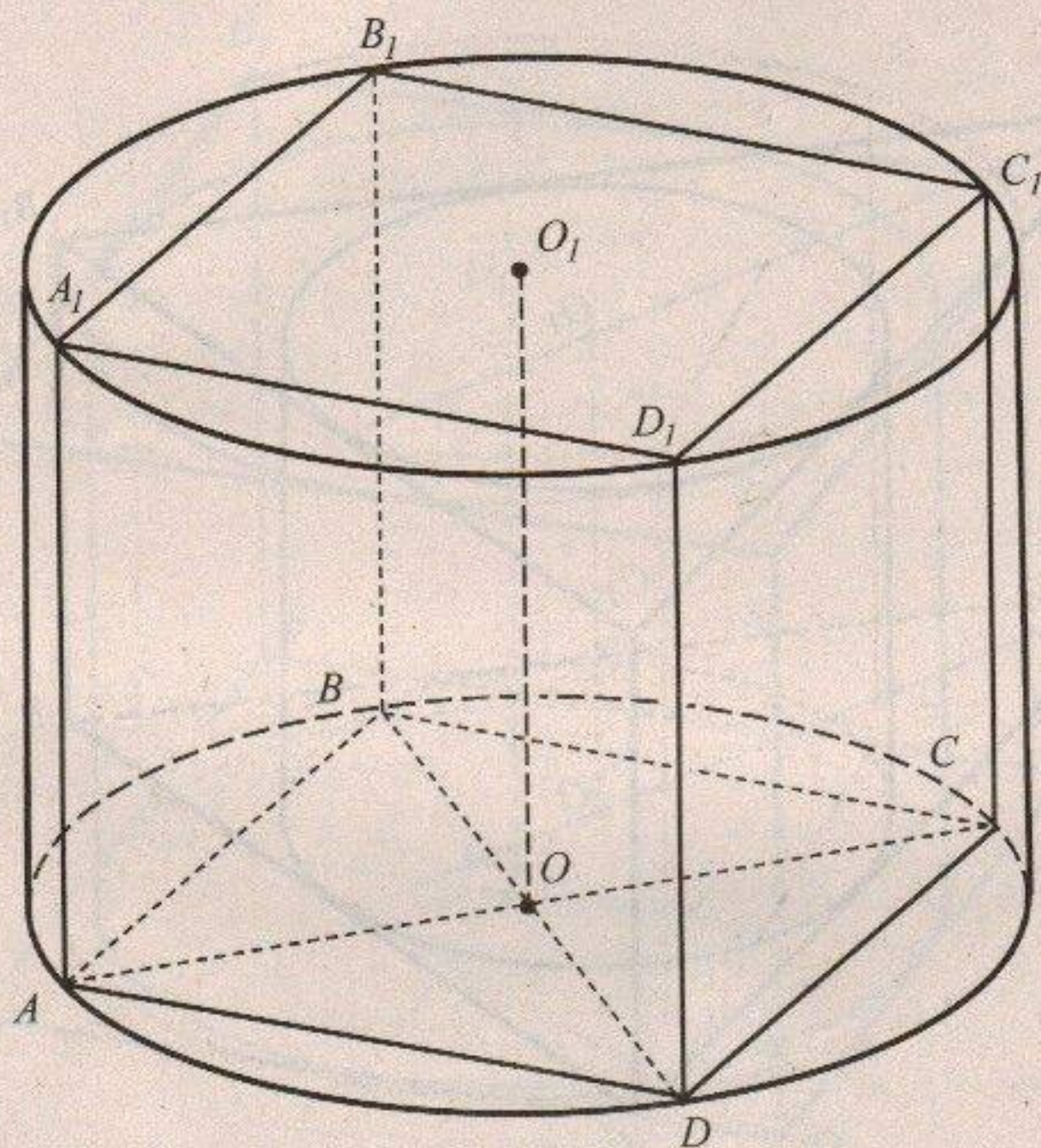
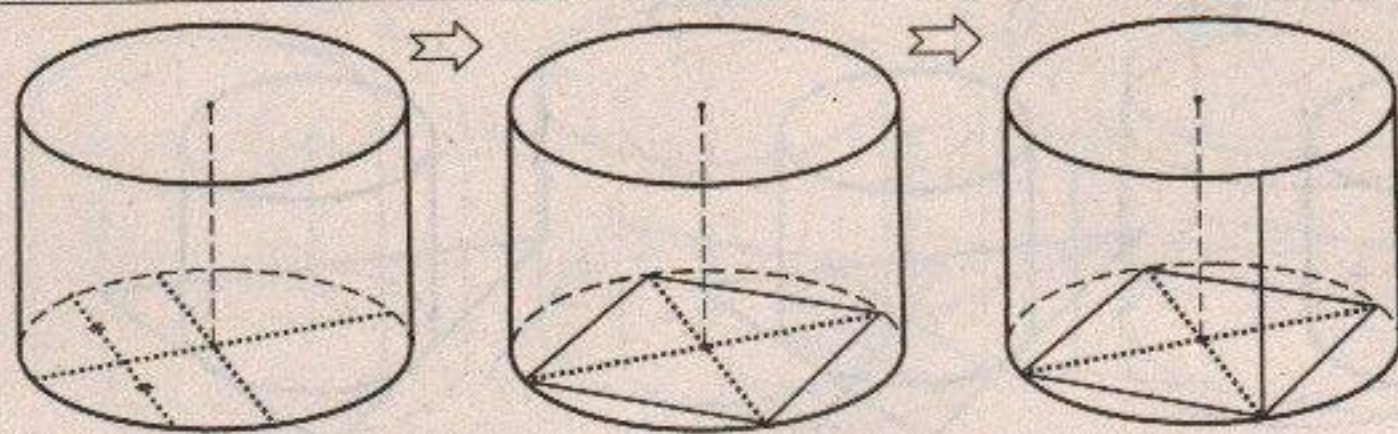


Рис. 23. Изображение цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы

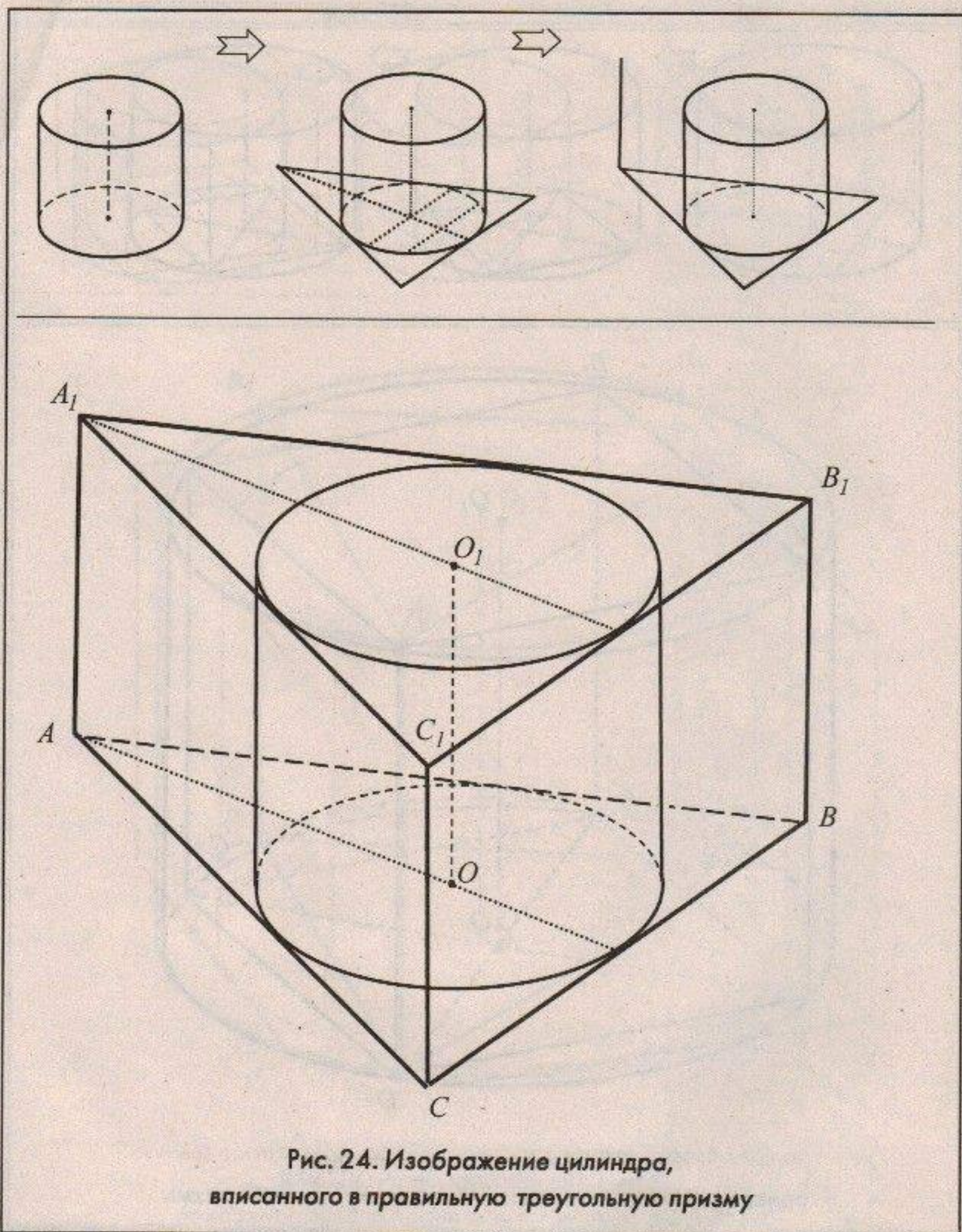


Рис. 24. Изображение цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму

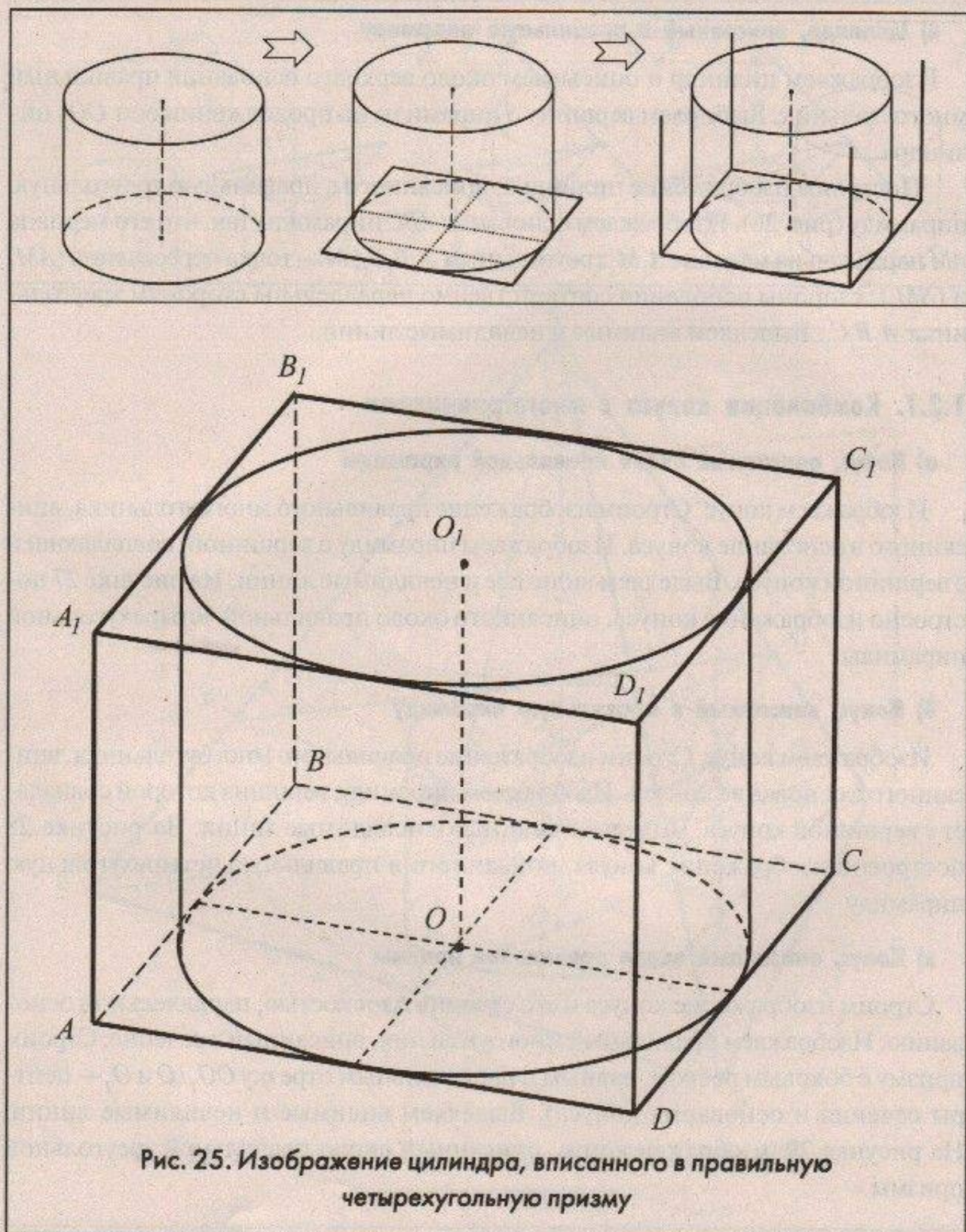


Рис. 25. Изображение цилиндра, вписанного в правильную четырехугольную призму

в) Цилиндр, вписанный в правильную пирамиду

Изображаем цилиндр и описываем около верхнего основания правильный многоугольник. Выбираем вершину S пирамиды на продолжении оси OO_1 цилиндра.

Построим изображение цилиндра, вписанного в правильную треугольную пирамиду (рис. 26). Изображаем основание ABC пирамиды так, что его медиана AM параллельна медиане A_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$; M — точка пересечения (AM) и (SM_1) ; стороны основания соответственно параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Выделяем видимые и невидимые линии.

1.3.7. Комбинации конуса с многогранниками

а) Конус, описанный около правильной пирамиды

Изображаем конус. Строим изображение правильного многоугольника, вписанного в основание конуса. Изображаем пирамиду с вершиной, совпадающей с вершиной конуса. Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунке 27 построено изображение конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды.

б) Конус, вписанный в правильную пирамиду

Изображаем конус. Строим изображение правильного многоугольника, вписанного в основание конуса. Изображаем пирамиду, вершина которой совпадает с вершиной конуса. Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунке 28 построено изображение конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду.

в) Конус, описанный около правильной призмы

Строим изображение конуса и его сечения плоскостью, параллельной основанию. Изображаем правильный многоугольник, вписанный в сечение. Строим призму с боковым ребром, равным и параллельным отрезку OO_1 (O и O_1 — центры сечения и основания конуса). Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунке 29 изображен конус, описанный около правильной треугольной призмы.

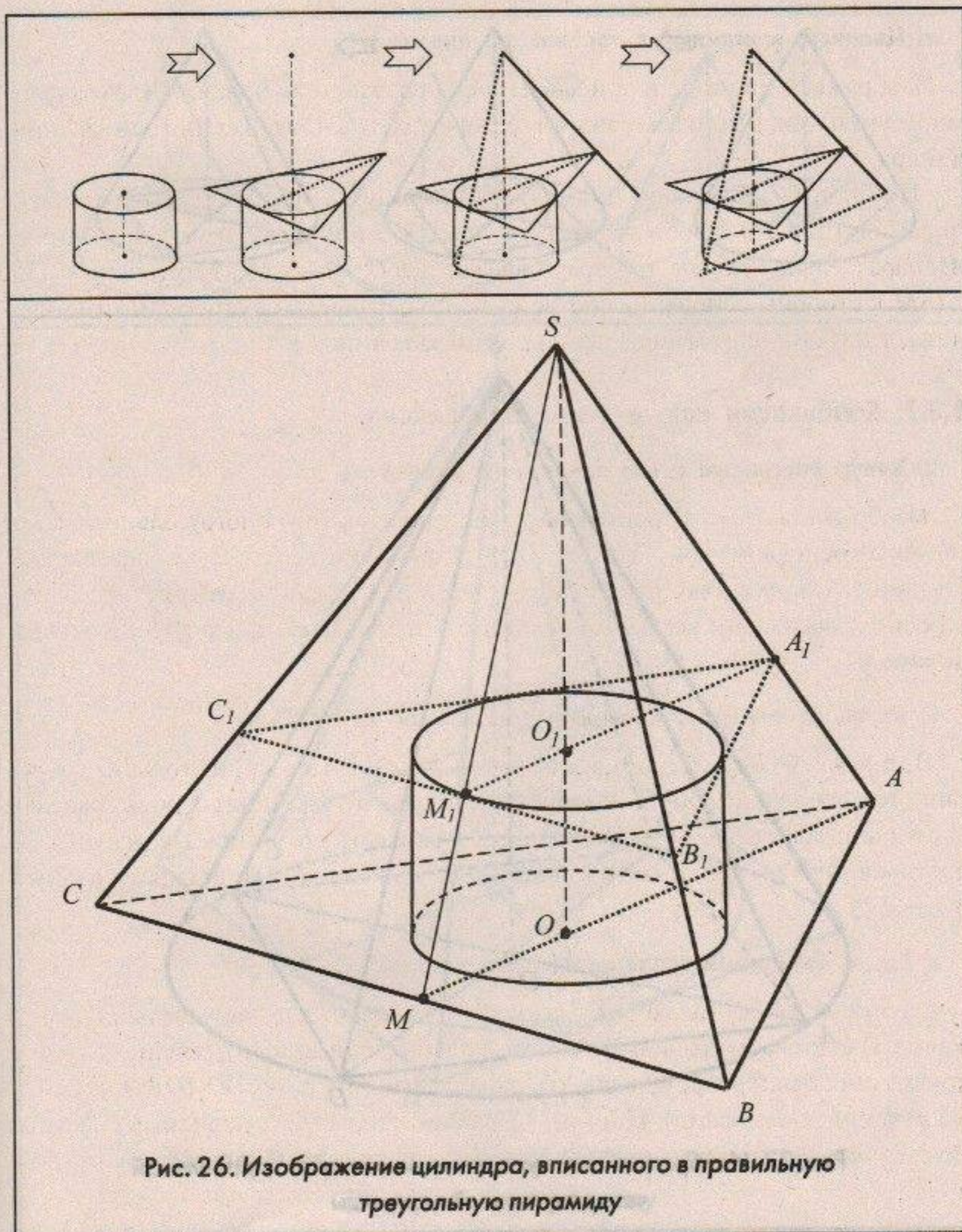


Рис. 26. Изображение цилиндра, вписанного в правильную треугольную пирамиду

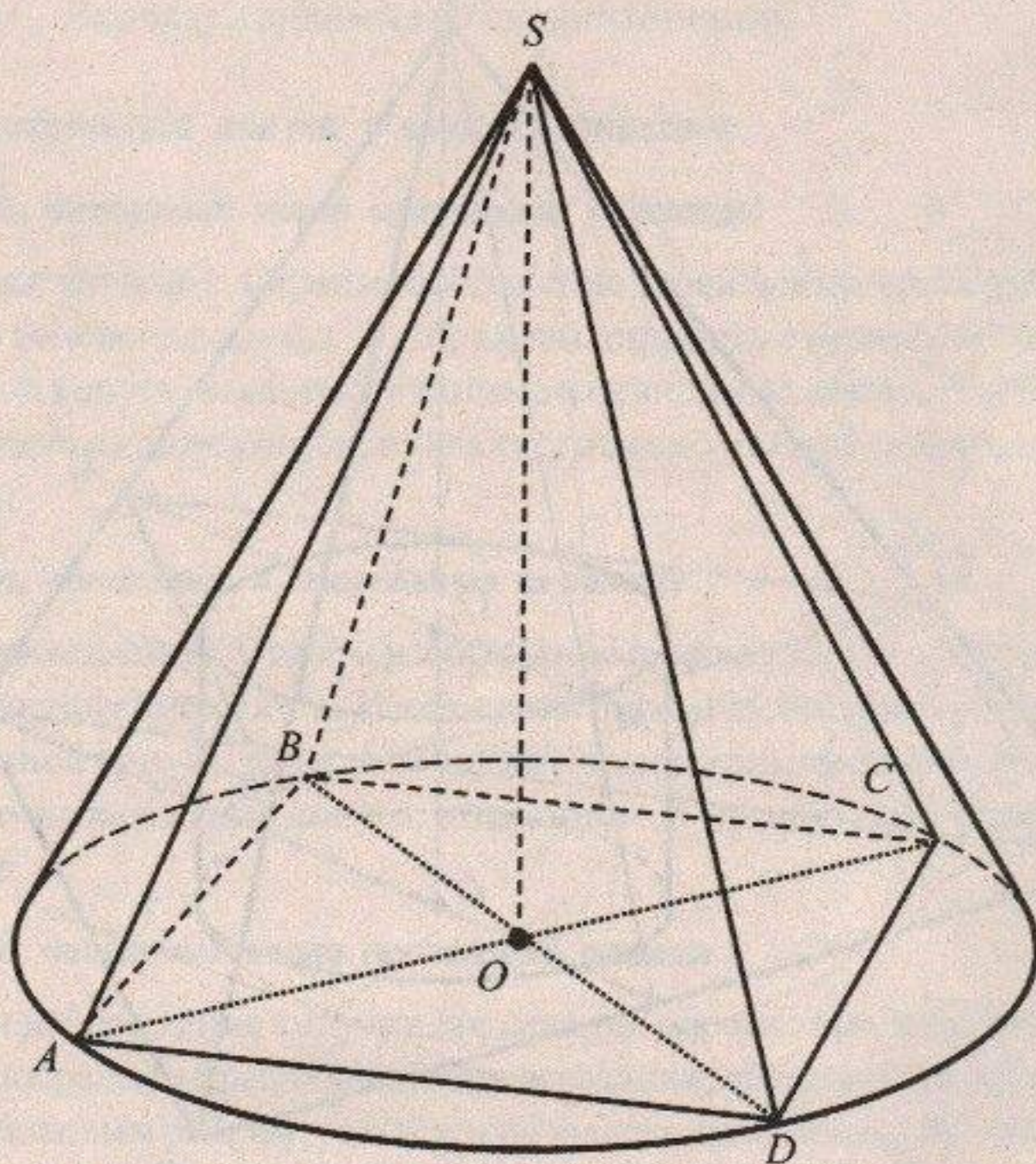
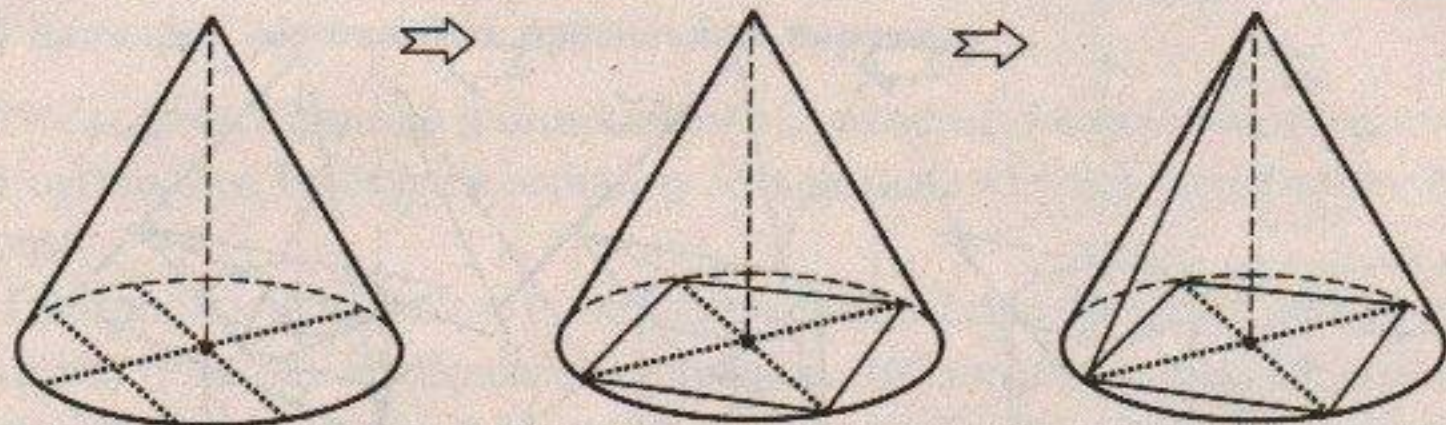


Рис. 27. Изображение конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды

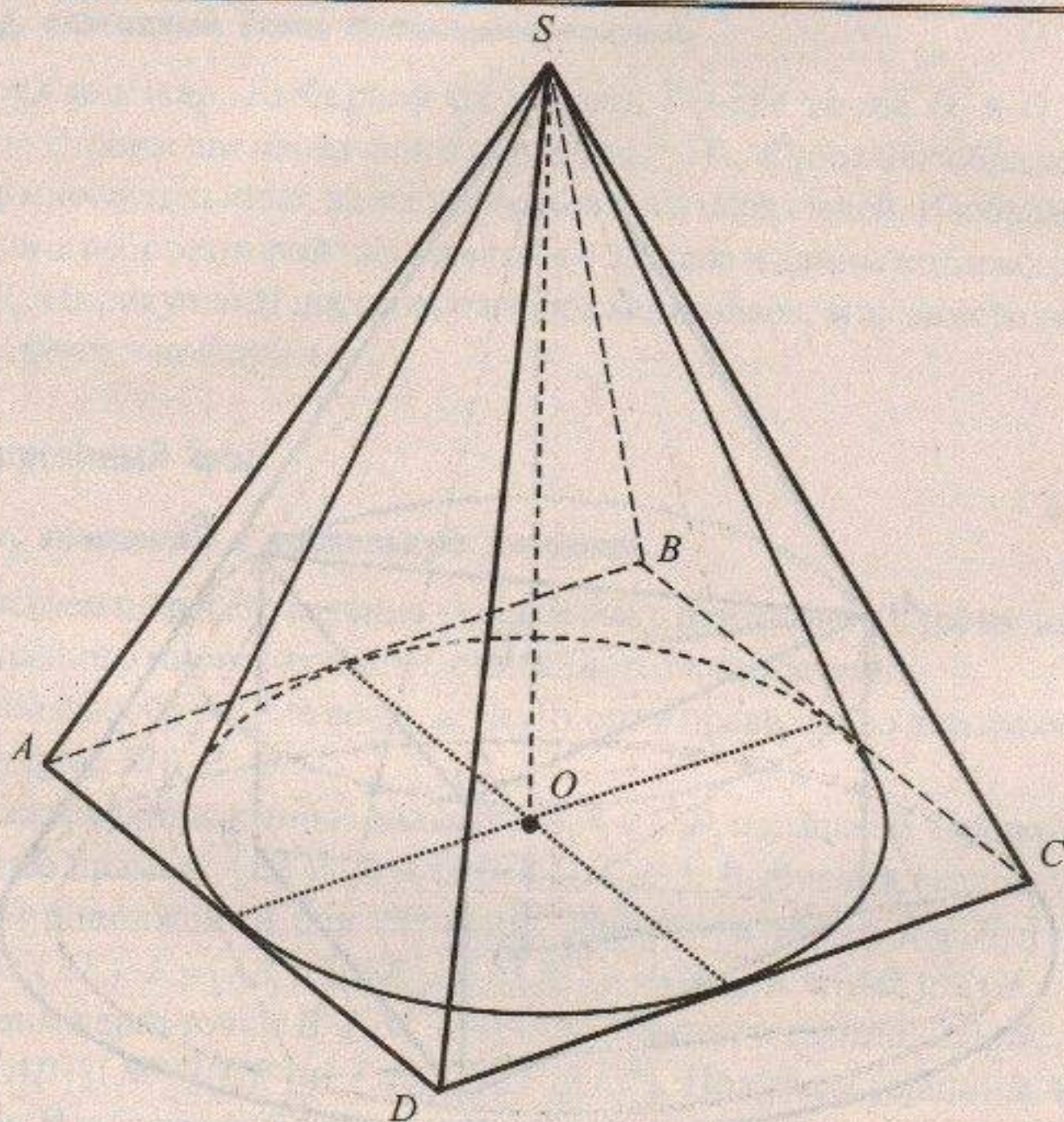
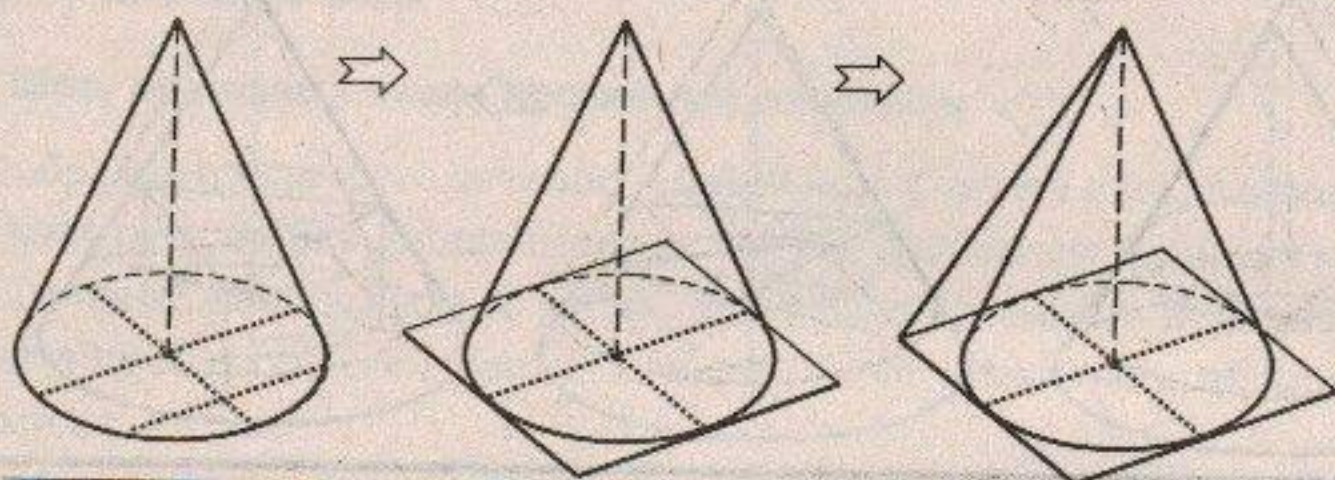


Рис. 28. Изображение конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду

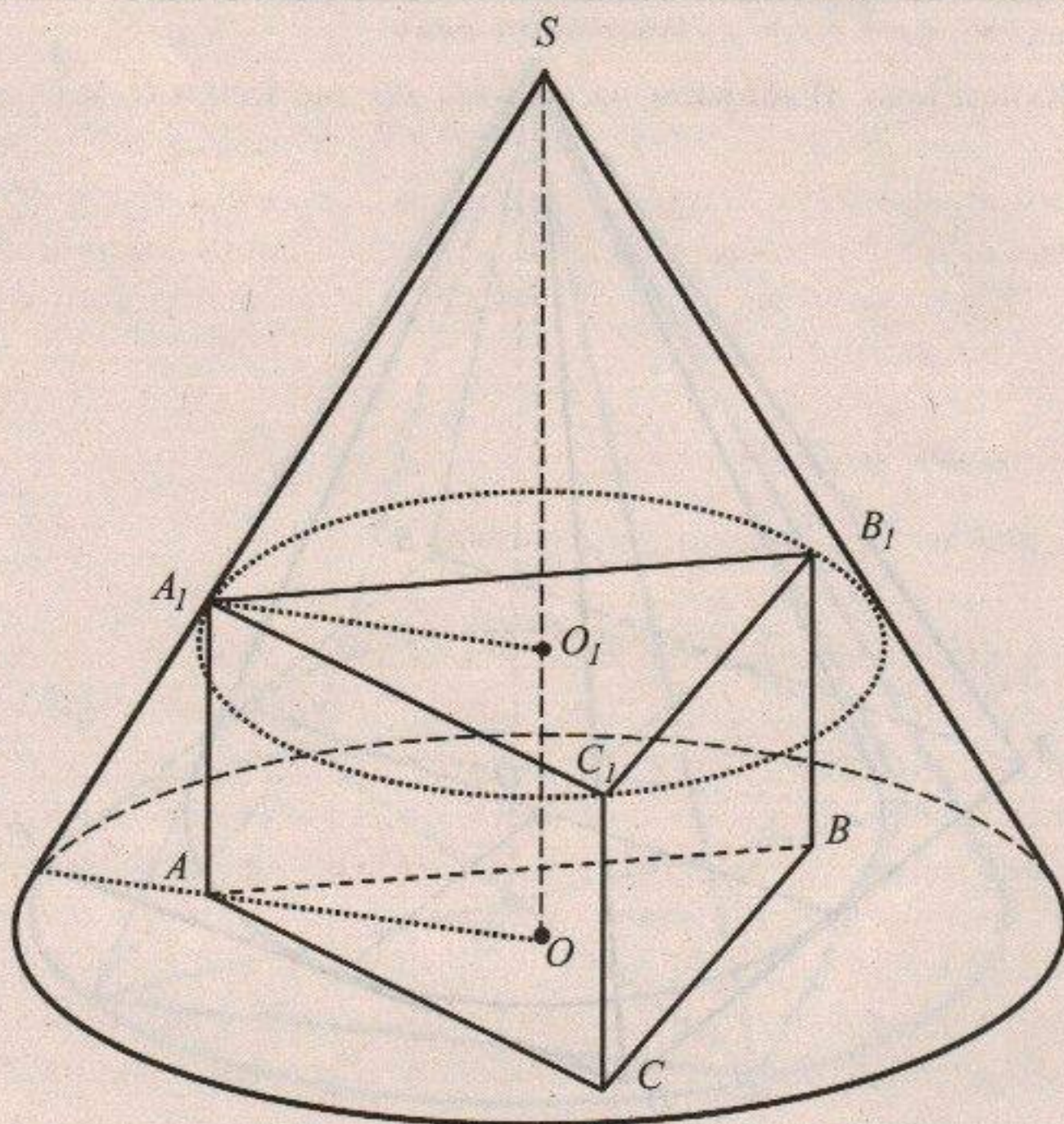
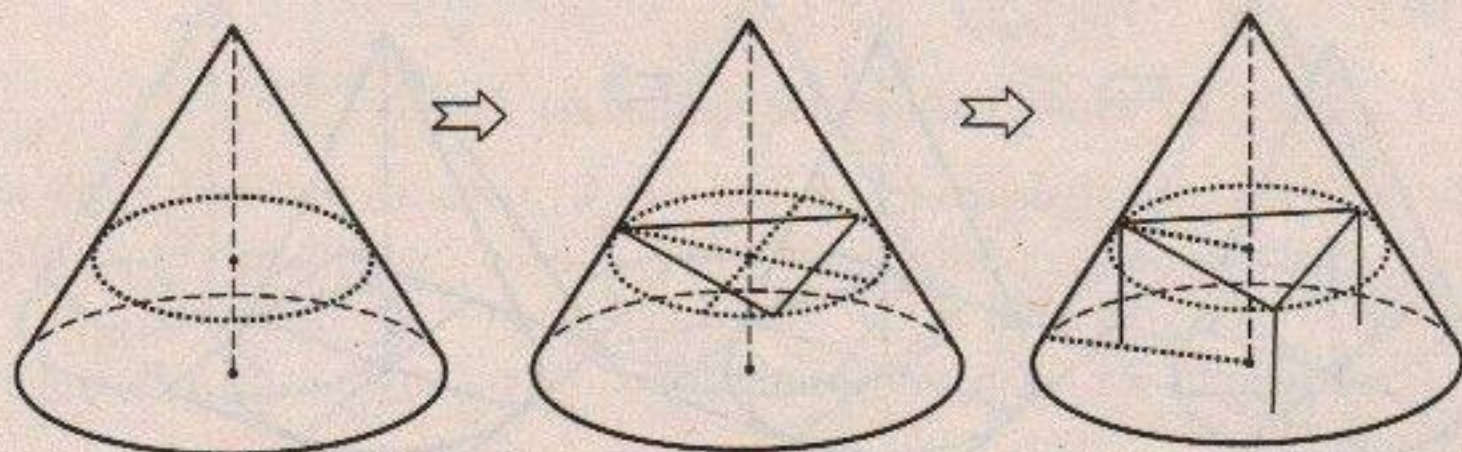


Рис. 29. Изображение конуса, описанного около правильной треугольной призмы

1.3.8. Описанный шар

а) Шар, описанный около правильной пирамиды

Изображаем шар и его сечение — *параллель*. Строим изображение правильного многоугольника, вписанного в сечение. Выбираем вершину пирамиды в полюсе шара, изображаем её ребра. Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунке 30 изображен шар, описанный около правильной четырехугольной пирамиды.

б) Шар, описанный около правильной призмы

Изображаем шар. Выбираем на его оси PQ две точки O_1 и O_2 так, что $OO_1 = OO_2$. Строим две параллели с центрами O_1, O_2 . Строим изображение правильного многоугольника, вписанного в одну из параллелей. Изображаем призму, боковые ребра которой параллельны оси шара и длины которых равны отрезку O_1O_2 . На рисунке 31 построено изображение шара, описанного около правильной треугольной призмы.

1.3.9. Вписанный шар

а) Шар, вписанный в правильную пирамиду

Изображаем шар и его сечение — *параллель* с центром O_1 . Строим изображение правильного многоугольника, описанного около сечения.

Построим изображение шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду (рис. 32).

Изображаем сопряженные диаметры A_1B_1 и C_1D_1 параллели. Проводим через полюс Q две прямые: $(EF) \parallel (A_1B_1)$, $(GK) \parallel (C_1D_1)$. Выбираем вершину S пирамиды на продолжении оси PQ шара. Получаем точки E, F, G, K так, что $E = (SA_1) \cap (EF)$, $F = (SB_1) \cap (EF)$, $G = (SC_1) \cap (GK)$, $K = (SD_1) \cap (GK)$.

Проводим через точки E, F, G, K прямые (соответственно) AD, BC, AB, DC , так, что $(AD) \parallel (BC) \parallel (GK)$ и $(AB) \parallel (CD) \parallel (EF)$. Получаем вершины A, B, C, D пирамиды. Изображаем боковые ребра пирамиды, выделяем видимые и невидимые линии.

Построим изображение шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду (рис. 33). Изображаем шар и одну из его параллелей с центром O_1 . Строим

изображение равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$, описанного около окружности. Выбираем вершину S пирамиды на продолжении оси PQ шара, проводим прямые SA_1, SB_1, SC_1 . Через точку Q проводим прямую AM , параллельную медиане A_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, и получаем точку M : $M = (AM) \cap (SM_1)$. Строим точку A : $A \in (AM)$, $AQ = 2QM$. Проводим $(AC) \parallel (A_1C_1)$, $(AB) \parallel (A_1B_1)$; далее — прямую BC через точку M и так, что $(BC) \parallel (B_1C_1)$.

Получаем точки B и C так, что $B = (AB) \cap (BC)$, $C = (AC) \cap (BC)$. Выделяем видимые и невидимые линии.

На рисунке 34 построено изображение шара, вписанного в правильную треугольную усеченную пирамиду.

б) Шар, вписанный в правильную призму

Изображаем шар и его экватор. Строим изображение правильного многоугольника, описанного около экватора. Боковые ребра призмы параллельны и равны оси PQ шара, проходят через вершины построенного сечения и в них делятся пополам. Выделяем видимые и невидимые линии. На рисунке 35 изображен шар, вписанный в правильную треугольную призму.

в) Шар, вписанный в цилиндр

Изображаем шар и его экватор. Строим изображения оснований цилиндра в виде эллипсов, *равных экватору* и имеющих центры в полюсах P, Q шара. Изображаем *контурные образующие* цилиндра *касательными* к его основаниям. Выделяем видимые и невидимые линии (рис. 36).

г) Шар, вписанный в конус

Изображаем шар и его экватор. Строим основание конуса в виде эллипса с *центром в полюсе Q* шара. Проводим контурные образующие конуса касательными к его основанию и очертанию шара. Получаем вершину S конуса на продолжении оси шара. Выделяем видимые и невидимые линии (рис. 37).

Предложенный способ построения не определяет размеры полуосей основания конуса, поэтому имеет ограниченное применение, а именно для выполнения иллюстративных чертежей. Точное решение задачи предполагает построение изображения конуса в ортогональной проекции, что не входит в задачи книги.

На рисунке 38 изображен шар, вписанный в усеченный конус.

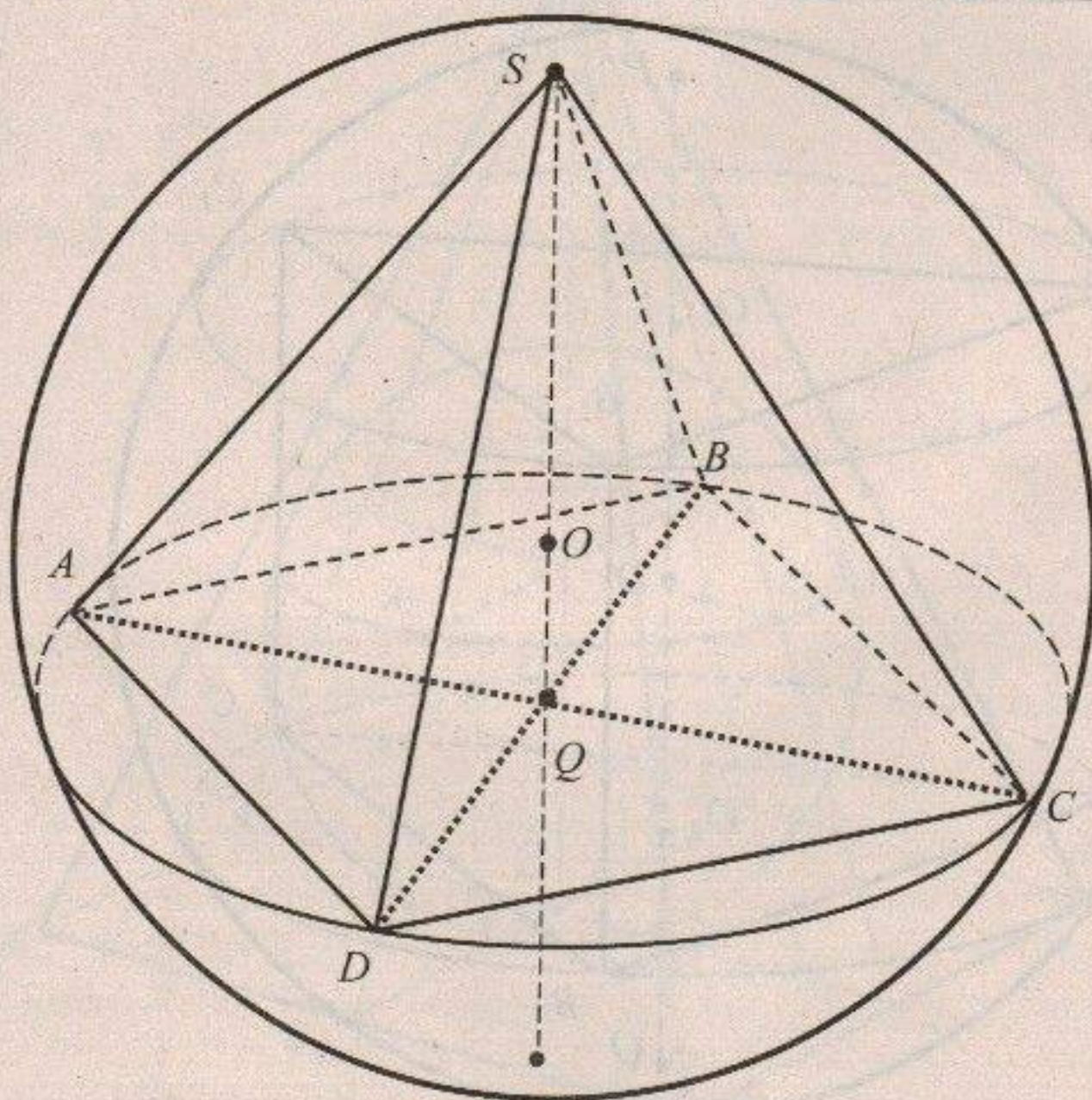
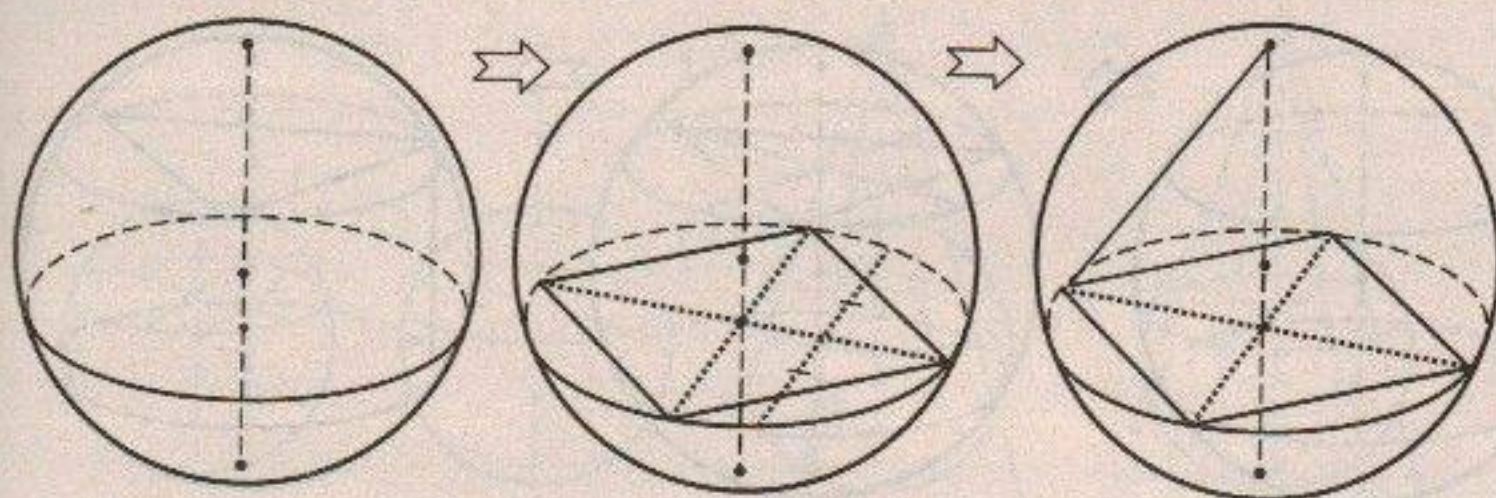
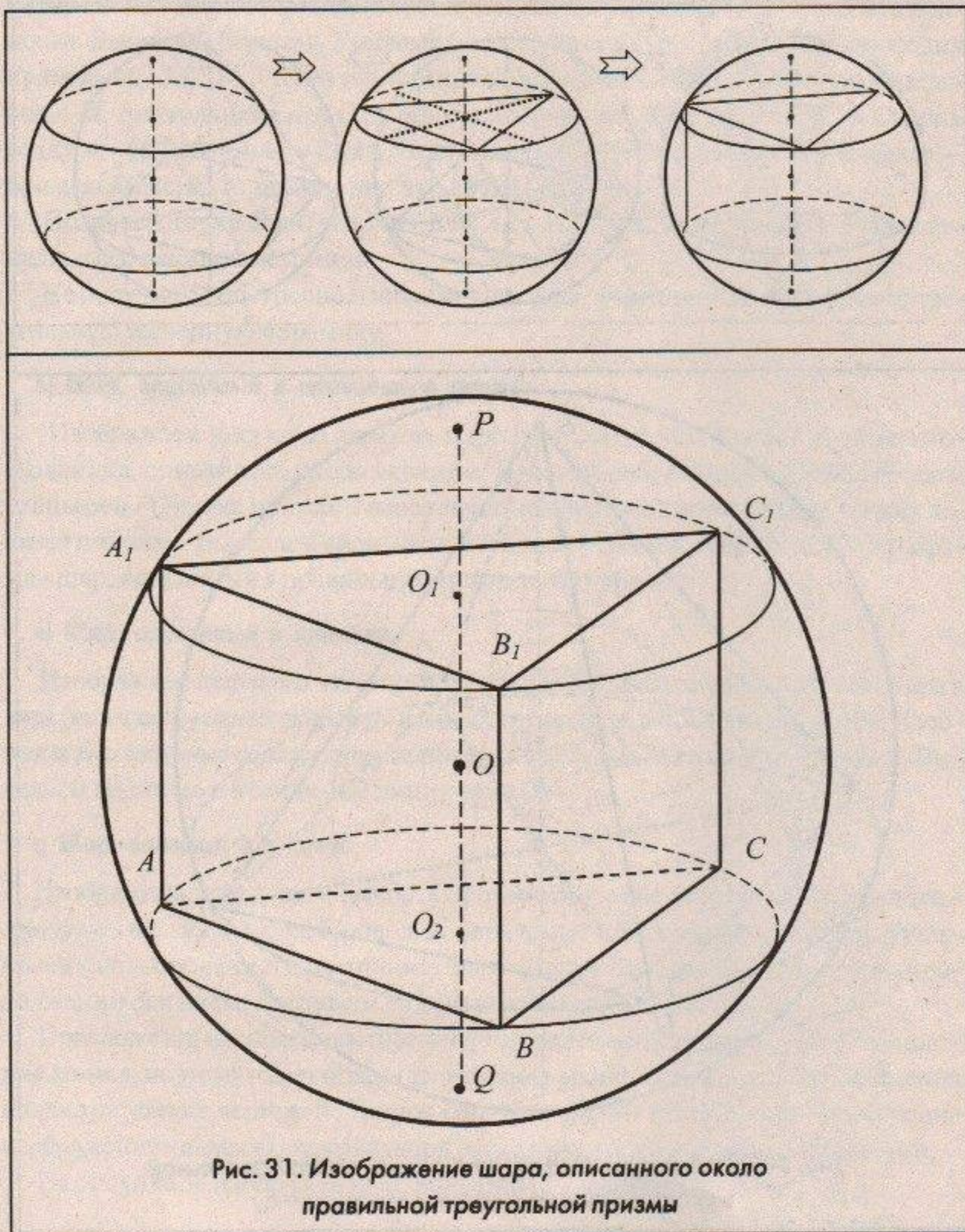


Рис. 30. Изображение шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды



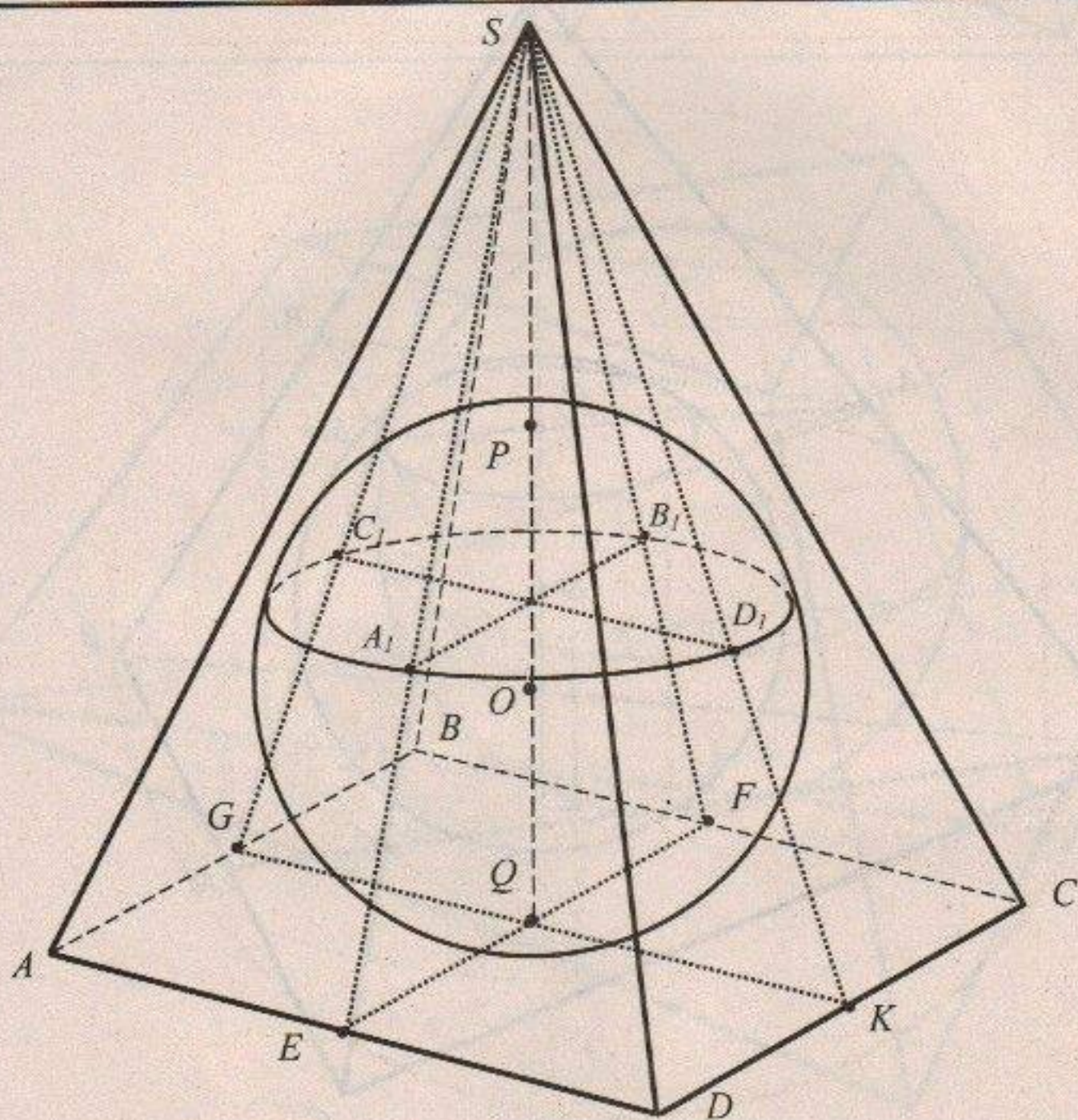
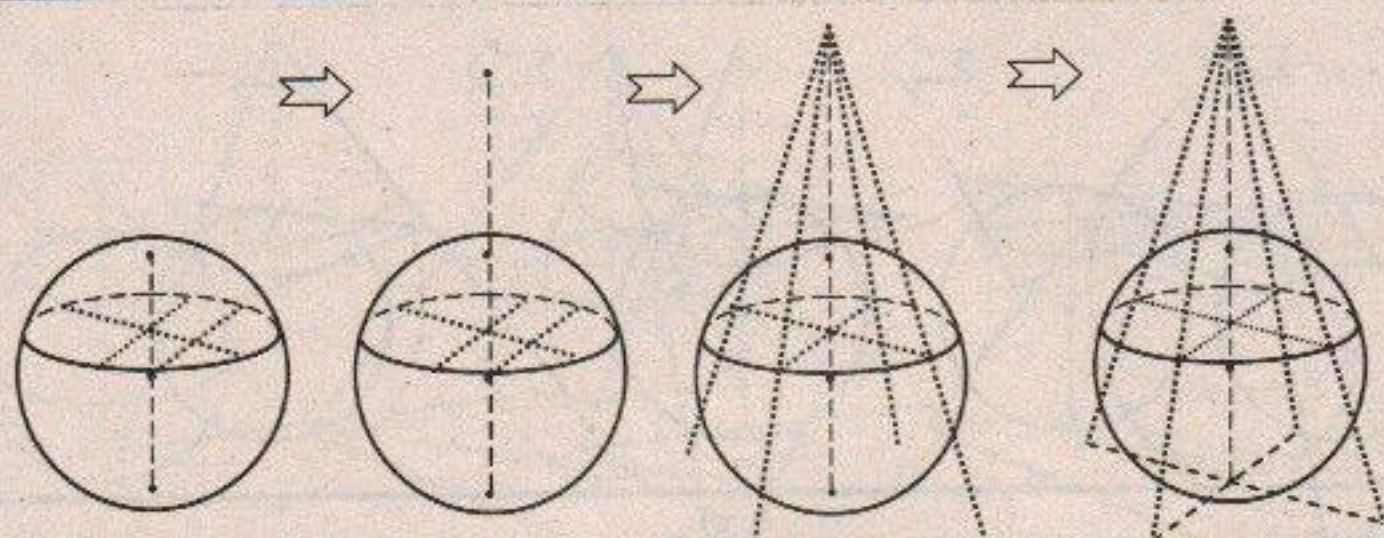
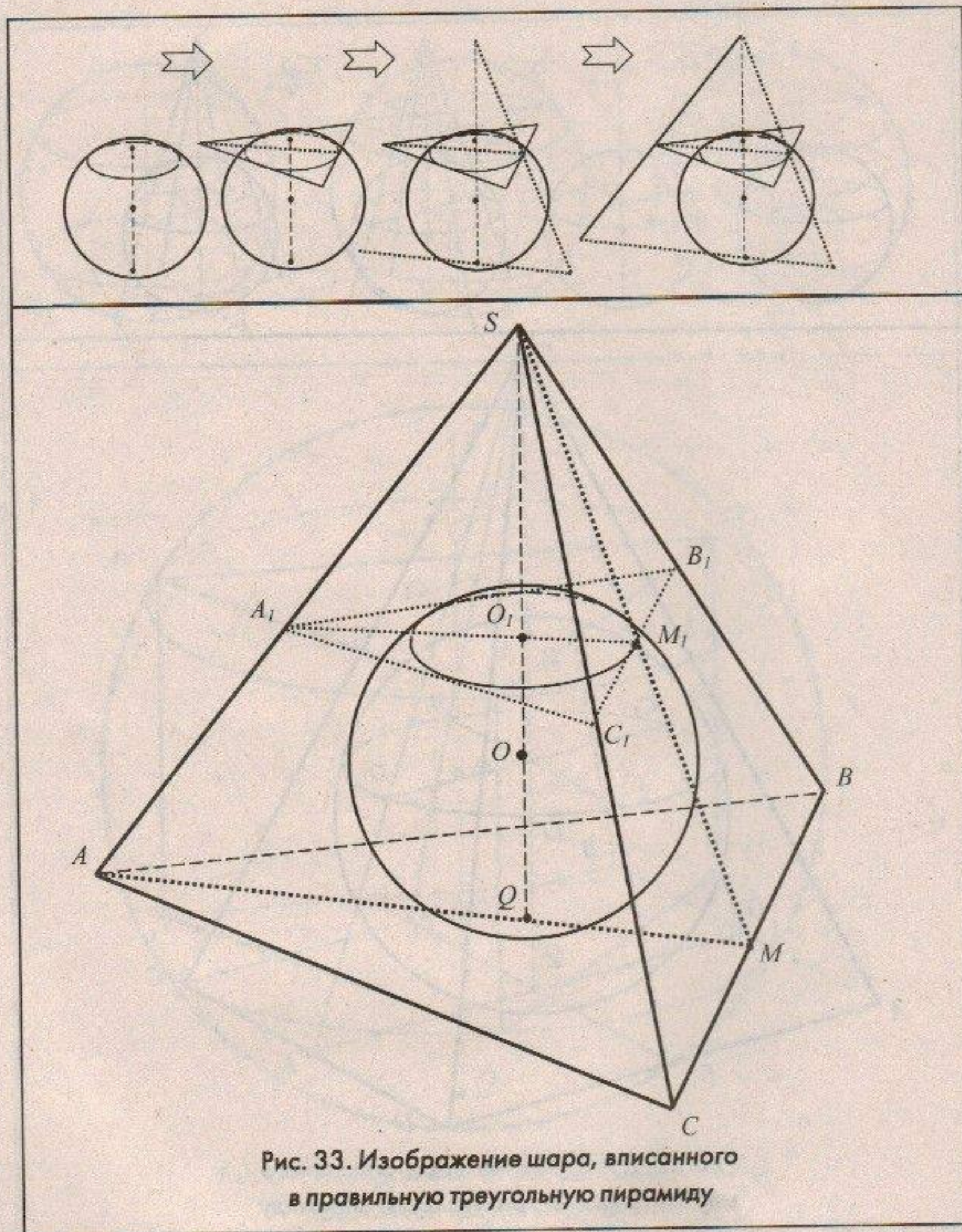


Рис. 32. Изображение шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду



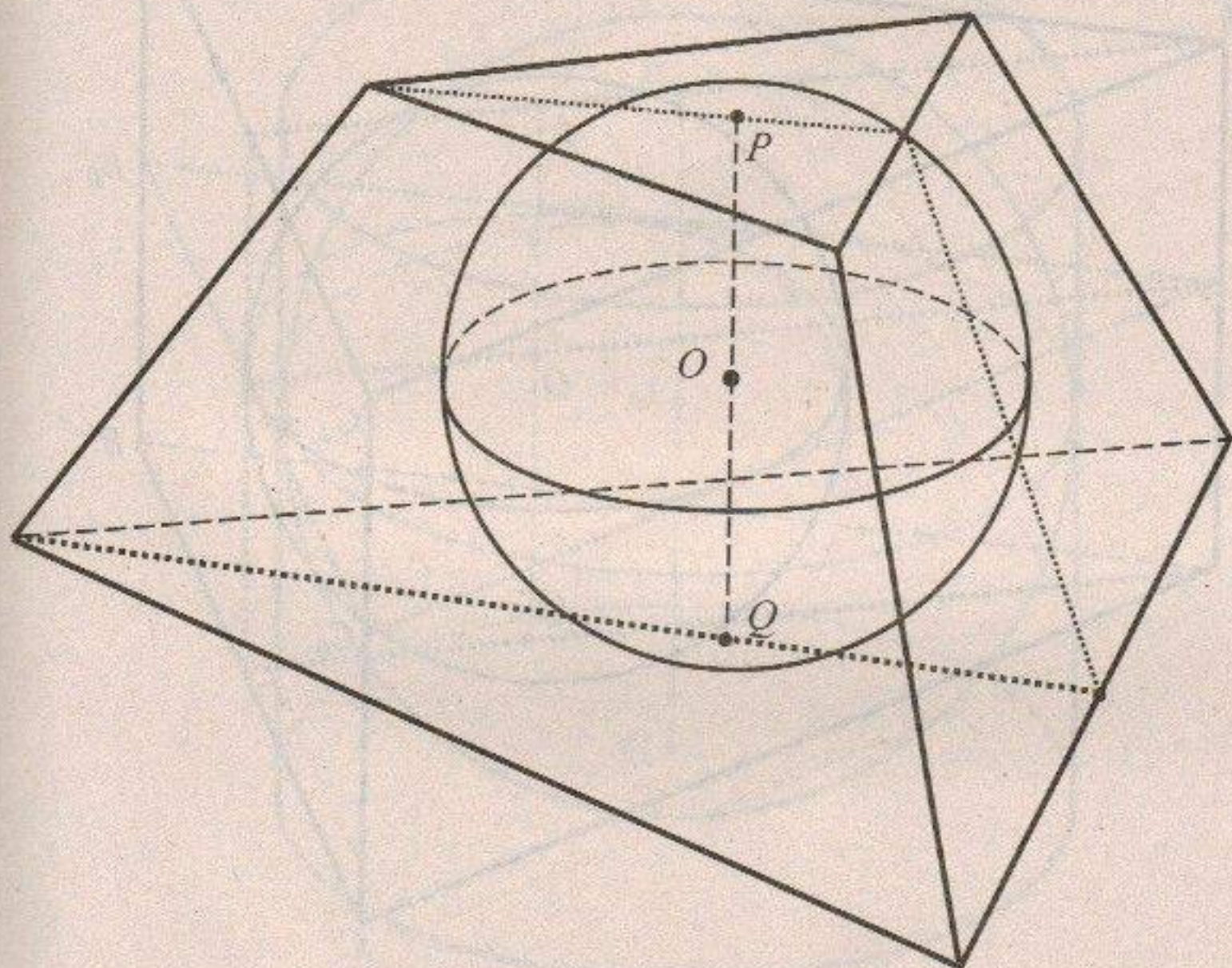
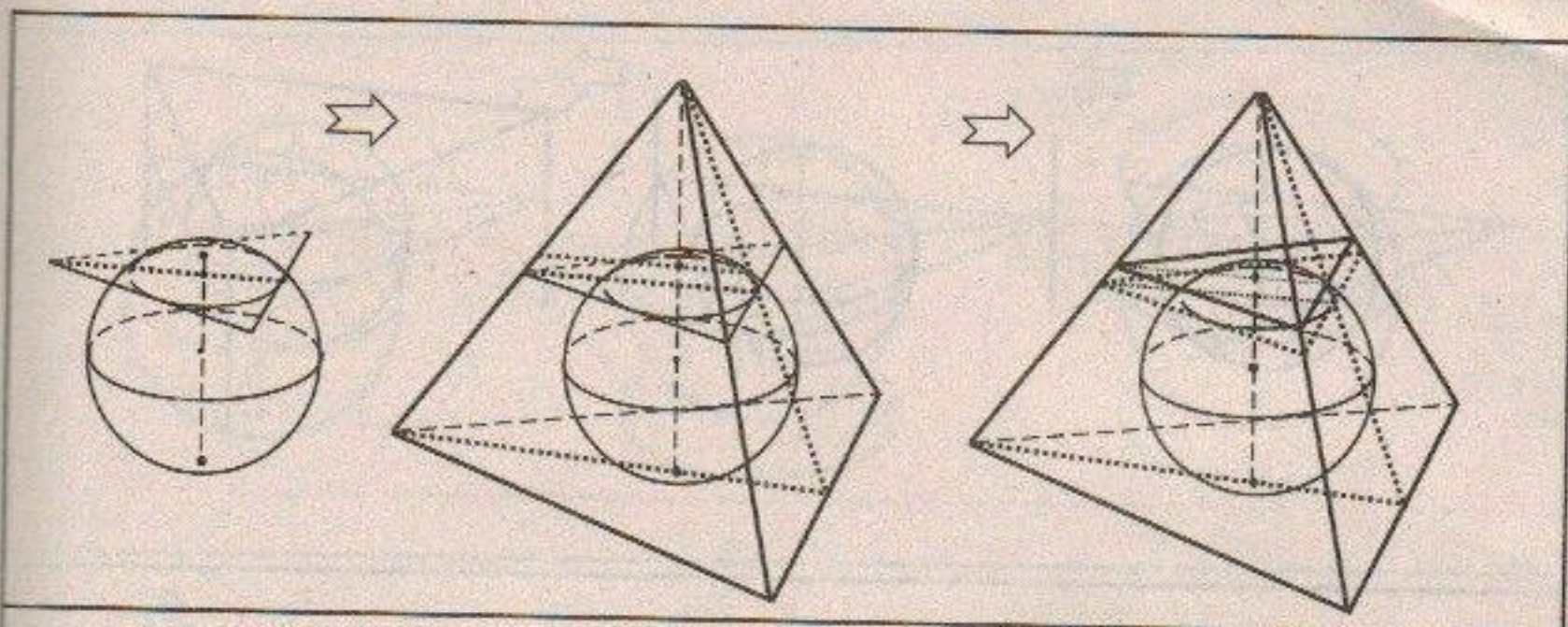
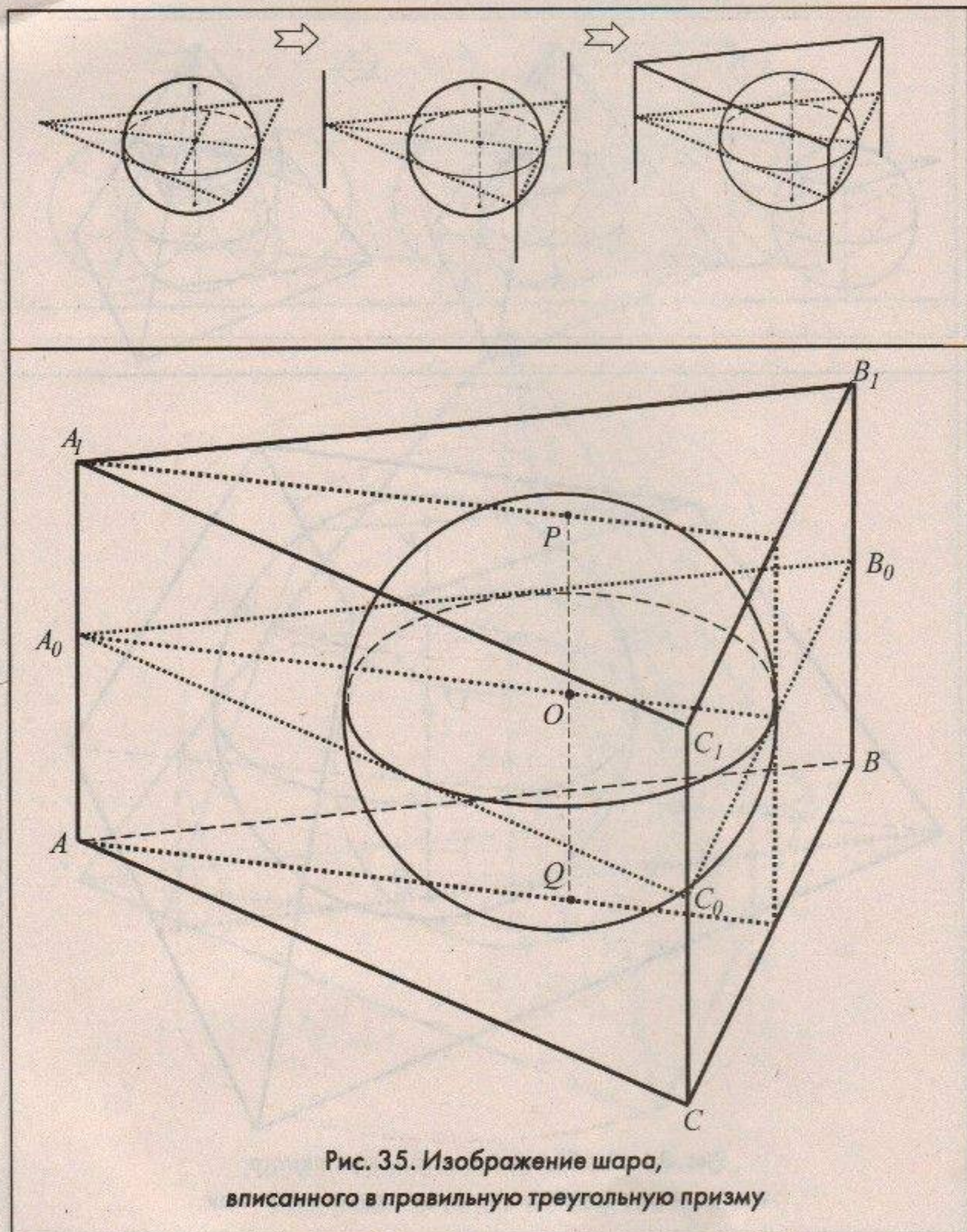


Рис. 34. Изображение шара, вписанного в правильную усеченную треугольную пирамиду



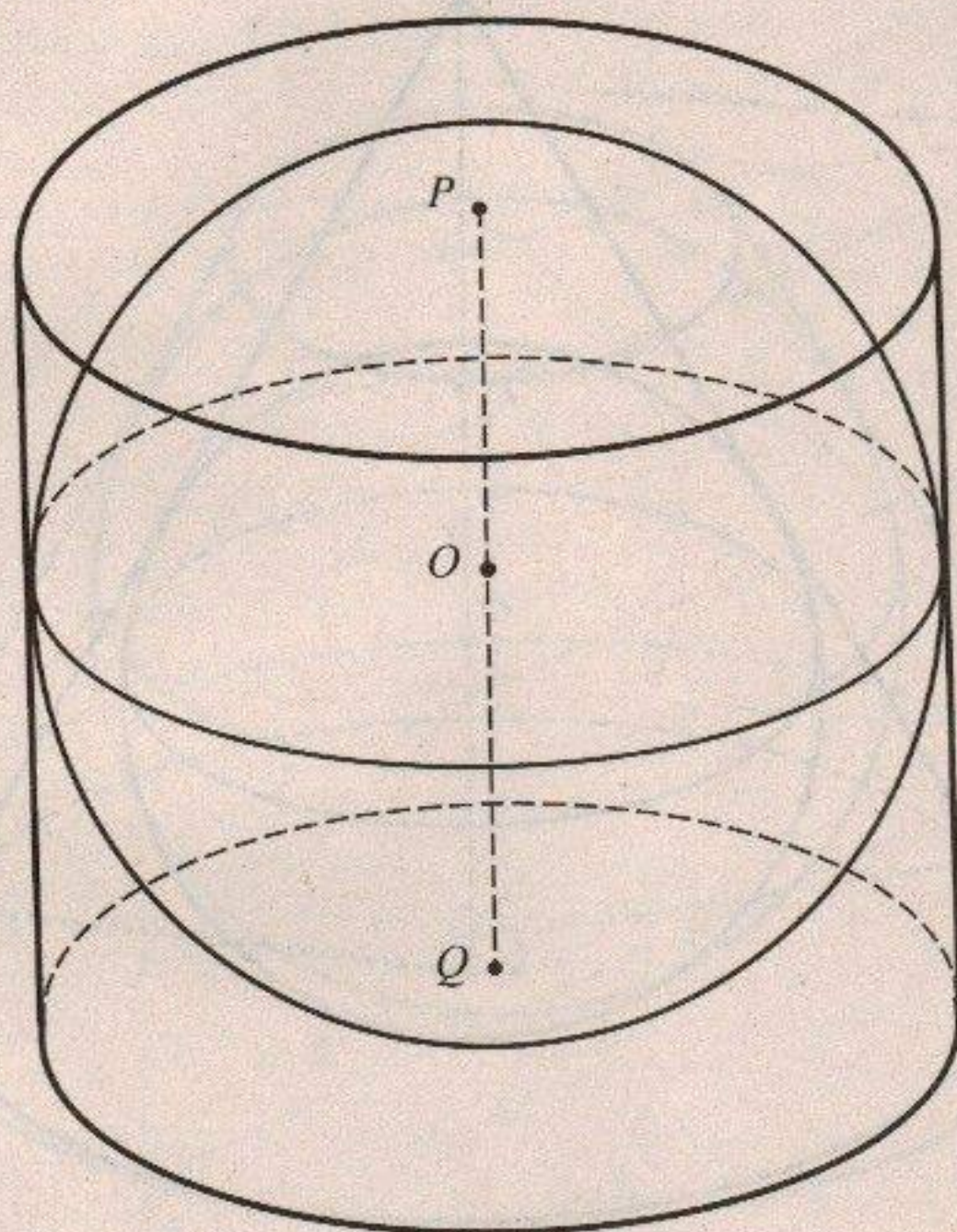
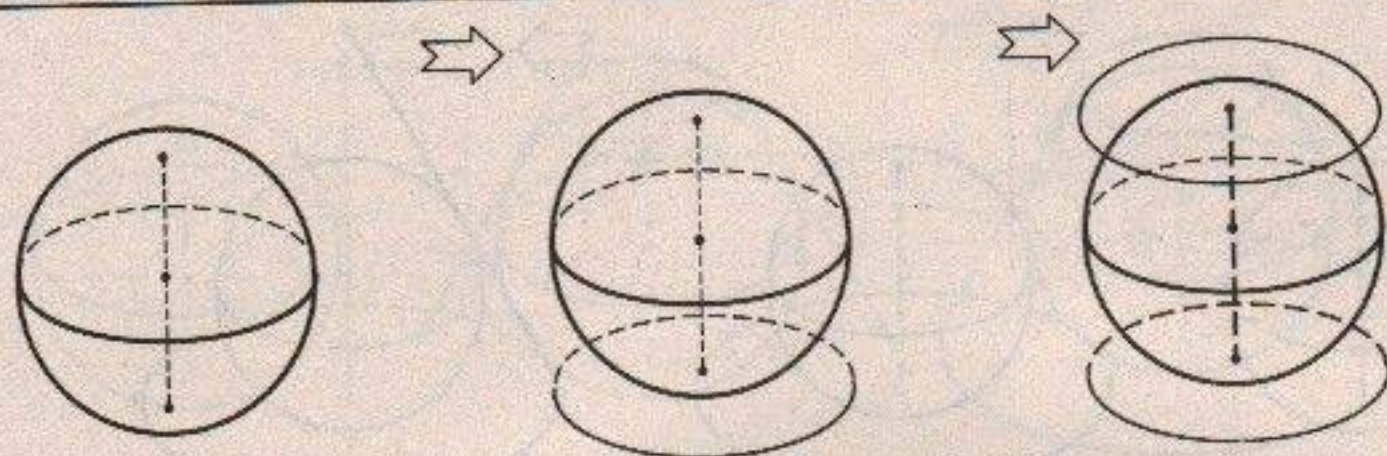


Рис. 36. Изображение шара, вписанного в цилиндр

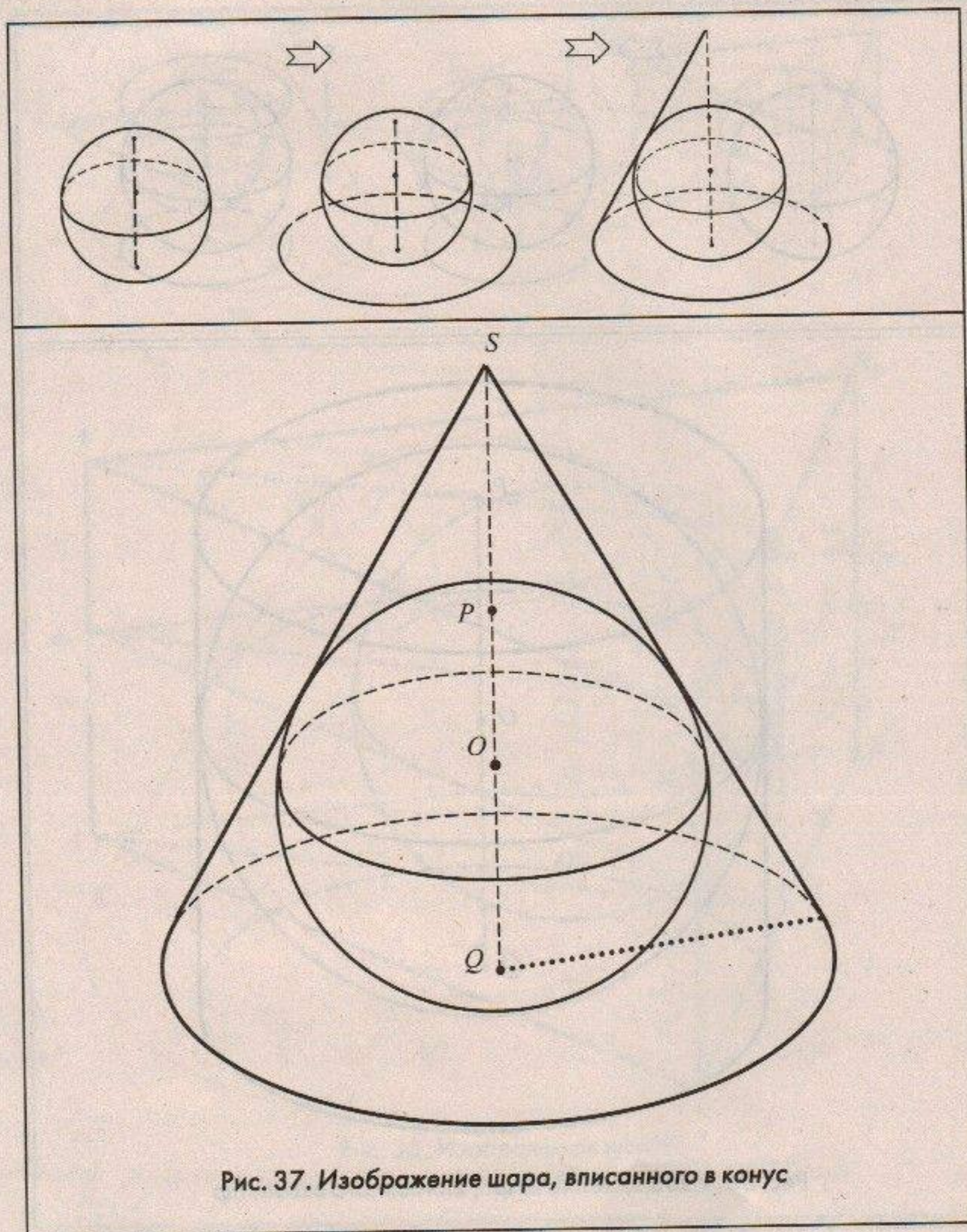


Рис. 37. Изображение шара, вписанного в конус

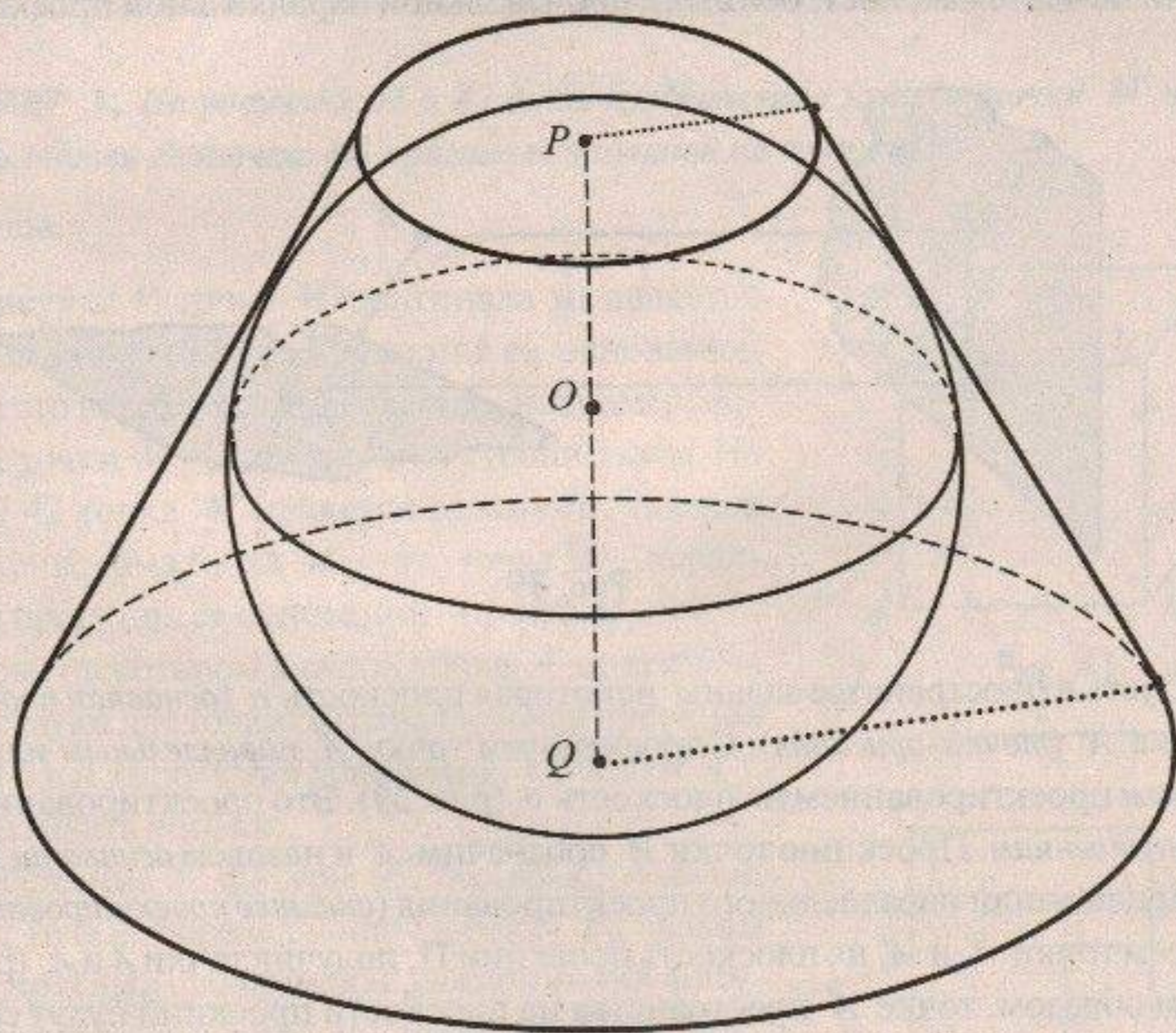
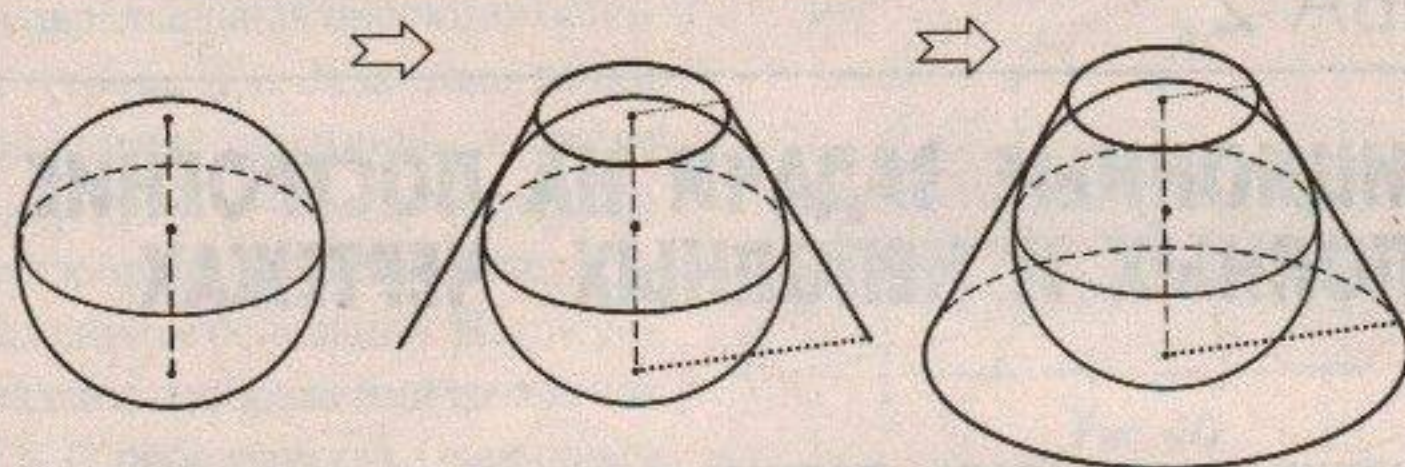


Рис. 38. Изображение шара, вписанного в усеченный конус

ГЛАВА 2

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ НА ПОЛНЫХ И НЕПОЛНЫХ ЧЕРТЕЖАХ

2.1. ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА. ПОЛНЫЕ И НЕПОЛНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Позиционными задачами в геометрии называют задачи на отыскание общих элементов двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости. Решают такие задачи на чертежах, построенных в произвольной параллельной проекции.

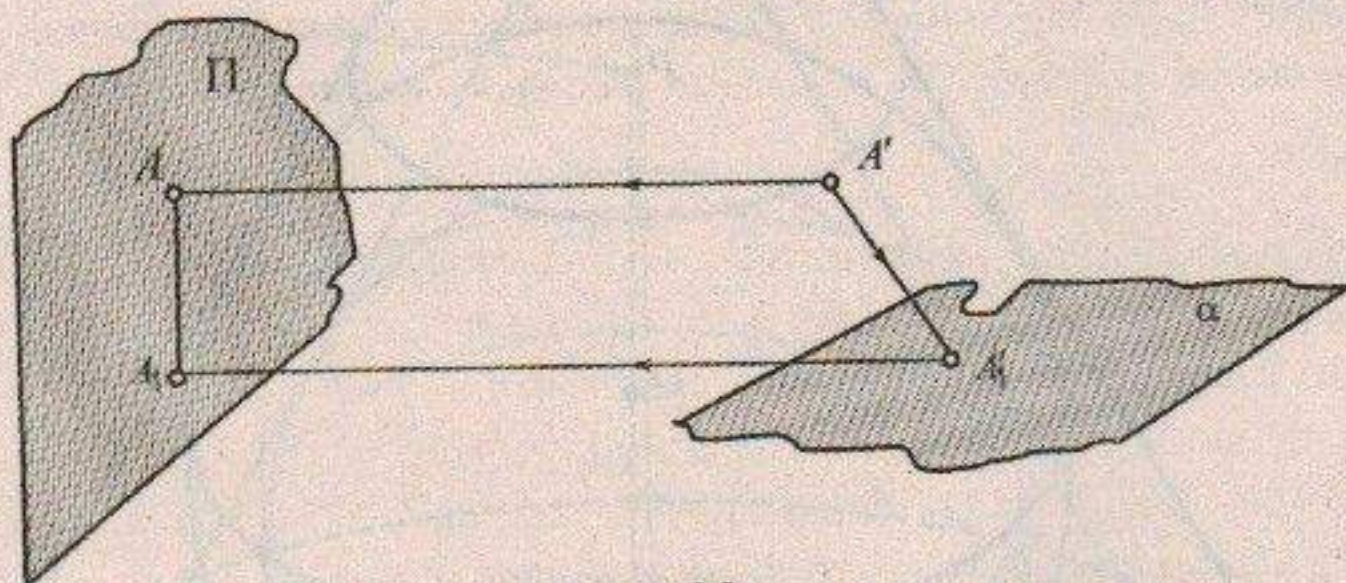


Рис. 39

Пусть в пространстве заданы некоторая плоскость α (основная плоскость) и точка A' (точка-оригинал). Спроектируем точку A' параллельным или центральным проектированием на плоскость α (рис. 39). Это проектирование назовем *внутренним*. Проекцию точки A' обозначим A_1 и назовем *основанием* точки A' . При помощи параллельного проектирования (*внешнее проектирование*) перенесем точки A' и A_1 на плоскость проекции Π , получив точки A и A_1 (рис. 40). Таким образом, точке A' пространства на плоскости проекций будут соответствовать две точки: A и A_1 . Точку A' оригинала назовем *заданной* на проекционном чертеже, если на нем изображены: параллельная проекция этой точки (точ-

ка A) и параллельная проекция основания (точка A_1). Заданные точки изображения запишем в виде $A'(A, A_1)$, где A' — точка оригинала, A — ее изображение на чертеже, A_1 — изображение ее основания. На рисунке 40 заданы изображения трех точек A' , B' и C' пространства. Очевидным является расположение точек по отношению к плоскости α : точки A' и B' расположены вне плоскости α , причем точка B' — ближе к плоскости α , чем A' , а точка C' лежит в плоскости α .

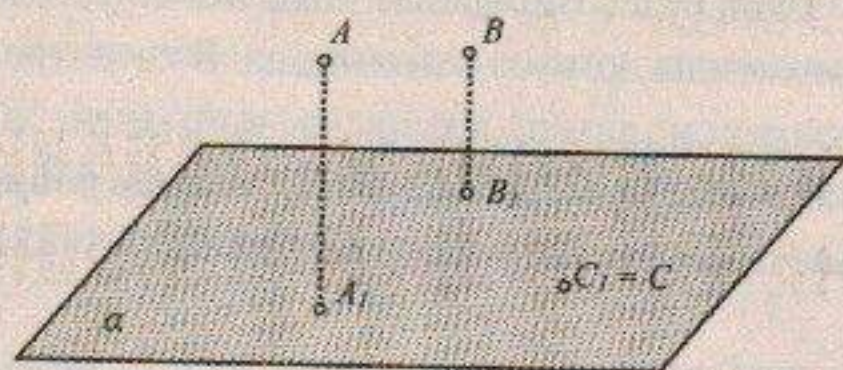


Рис. 40

Далеко не всегда точка является заданной на проекционном чертеже.

ПРИМЕР 1. На рисунках 41 и 42 даны изображения куба и точки M' в его грани. Является ли точка M' оригинала заданной на чертеже?

Решение.

На рисунке 41 точка M' оригинала не является заданной, так как нет изображения ее основания. В силу этого невозможно определить, например, положение точки M' по отношению к граням куба. На рисунке 42 точка M' является заданной, так как изображены: сама точка M' — это точка M — параллельная проекция ее основания — точка M_1 .

Чертеж, на котором каждой точке A' оригинала соответствуют две точки: A (параллельная проекция точки A') и A_1 (проекция основания, т.е. точки A'_1), будем называть *полным*.

Изображение F фигуры F' называют *полным*, если все точки, определяющие фигуру F' , заданы на нем. Другими словами, для каждой точки фигуры F' на чертеже указана или может быть построена ее проекция на основную плоскость.

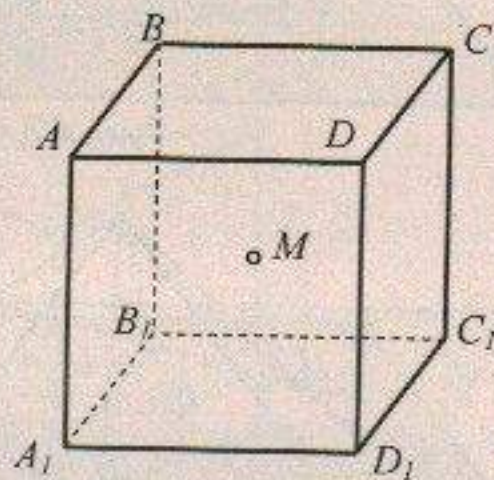


Рис. 41

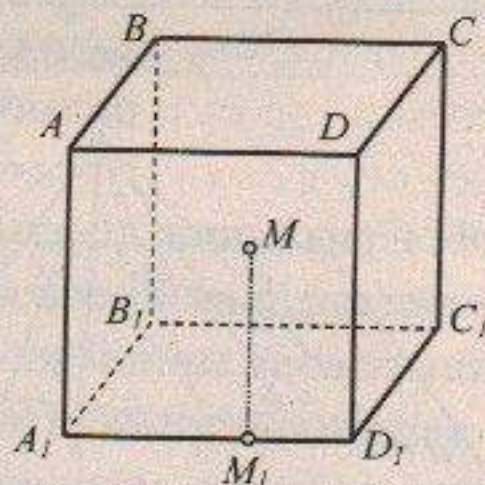


Рис. 42

Пользуясь определением, легко убедиться в полноте изображений призмы, пирамиды, конуса и цилиндра. В качестве основной плоскости выбирается плоскость основания, в качестве внутреннего проектирования для призм и цилиндров — параллельное вдоль бокового ребра, для пирамид и конусов — центральное проектирование из вершины.

ПРИМЕР 2. На рисунках 43 и 44 заданы изображения четырехугольной пирамиды $S'A'B'C'D'$ и прямой $M'K'$. Какие грани пирамиды-оригинала пересекает прямая $M'K'$?

Решение.

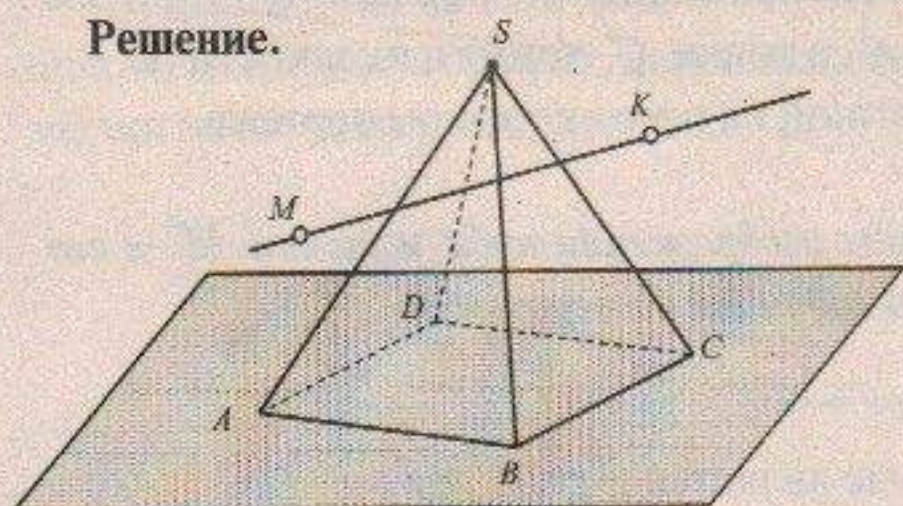


Рис. 43

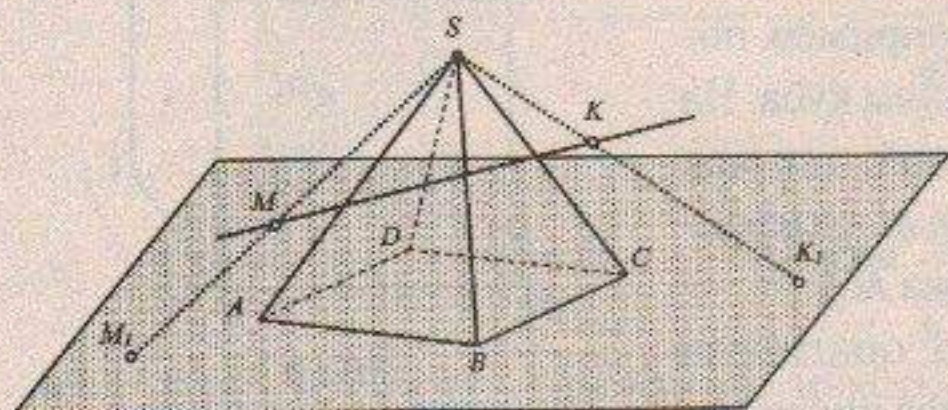


Рис. 44

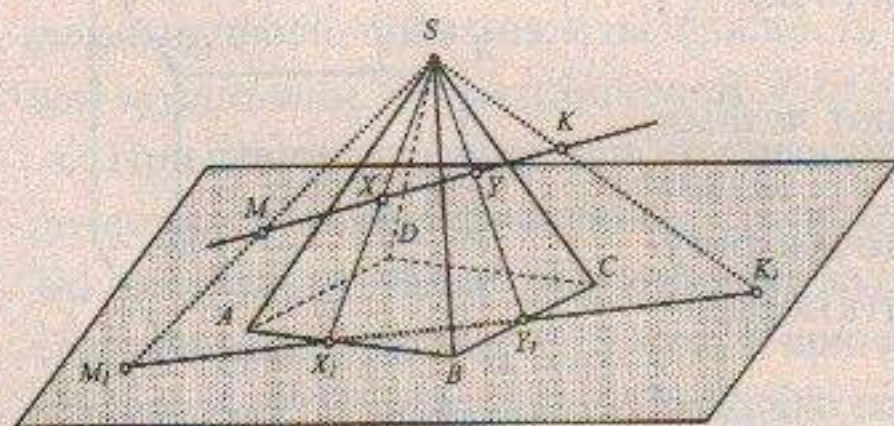


Рис. 45

Изображение пирамиды является полным на обоих рисунках. Однако изображение на рисунке 43 в целом не является полным, поскольку на нем не заданы проекции точек M и K , поэтому невозможно определить точки пересечения прямой MK с гранями пирамиды. Изображение на рисунке 44 является полным, и поэтому решение задачи на отыскание общих точек X и Y пирамиды и данной прямой становится возможным. Прямая MK пересекает грани SAB и SBC , построение точек пересечения X и Y ясно из рисунка 45.

Число независимых параметров, которые надо задать, чтобы изображение стало полным, будем называть коэффициентом *неполноты* изображения.

В нашем примере надо задать проекции двух точек на основную плоскость, поэтому коэффициент неполноты равен 2.

Прямая l' оригинала будет заданной на проекционном чертеже, если на нем заданы любые две ее точки. На чертеже будем иметь прямую l и ее проекцию на основную плоскость — $l_1(l, l_1)$. При этом, если внутреннее проектирование является параллельным, то прямые AA_1 и BB_1 параллельны (рис. 46), если центральным — то прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке S (рис. 47).

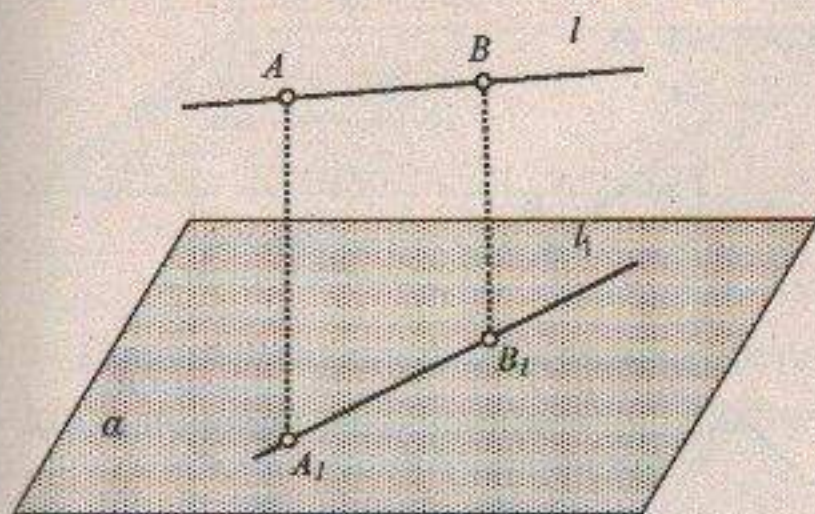


Рис. 46

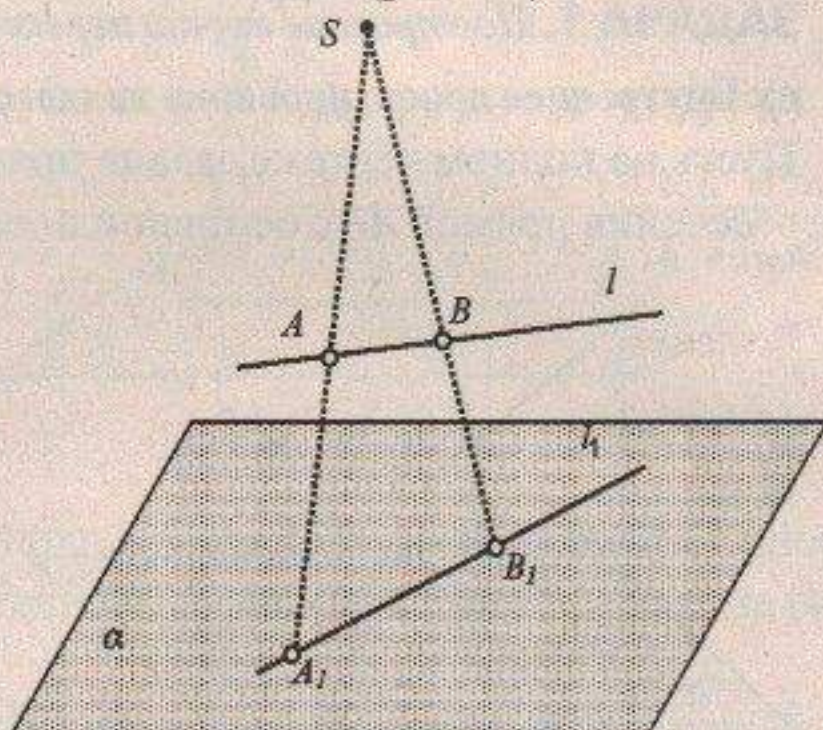


Рис. 47

Плоскость будет заданной на проекционном чертеже, если на нем заданы любые три не лежащие на одной прямой точки. На чертеже будем иметь три точки и их проекции на основную плоскость (рис. 48).

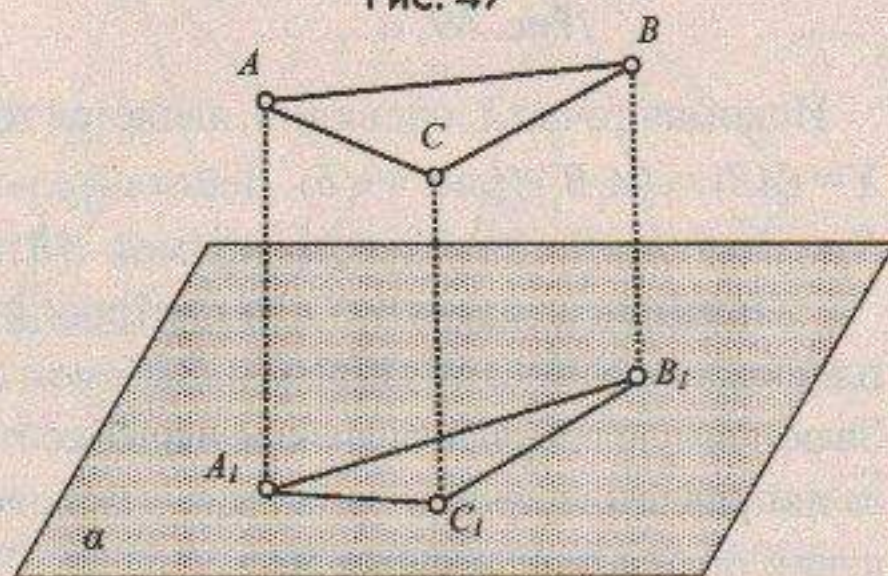


Рис. 48

Полное изображение позволяет решать задачи на определение взаимного расположения точек, прямых и плоскостей. Говорят, что полный чертеж определяет позиционные свойства оригинала. Если изображение является полным, то решение позиционной задачи не допускает произвола, все построения проводятся по определенным правилам. Если же изображение не является полным, то при решении позиционной задачи некоторые элементы можно задать произвольно, а после того, как изображение станет полным, все остальные построения надо проводить по строгим правилам.

2.2. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим основные позиционные задачи и способы их решения на полных изображениях призм и пирамид.

ЗАДАЧА 1. Построение точки пересечения прямой с основной плоскостью

а) Внутреннее проектирование является параллельным

Пусть на полном чертеже задана прямая AB (рис. 49, а). Построим точку X пересечения прямой AB с основной плоскостью α .

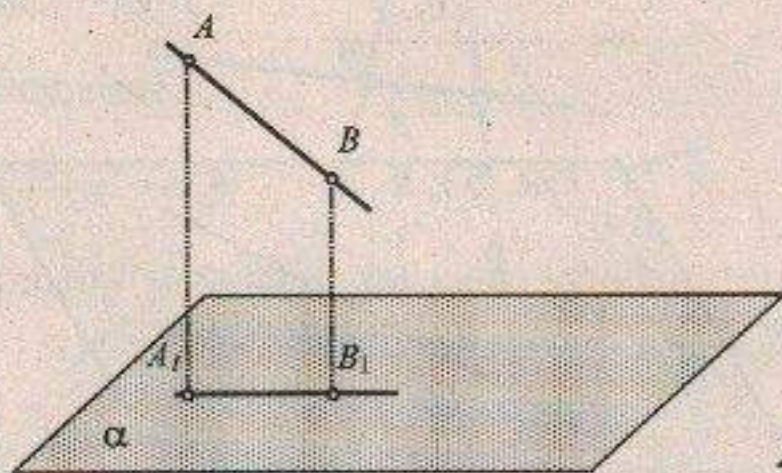


Рис. 49, а

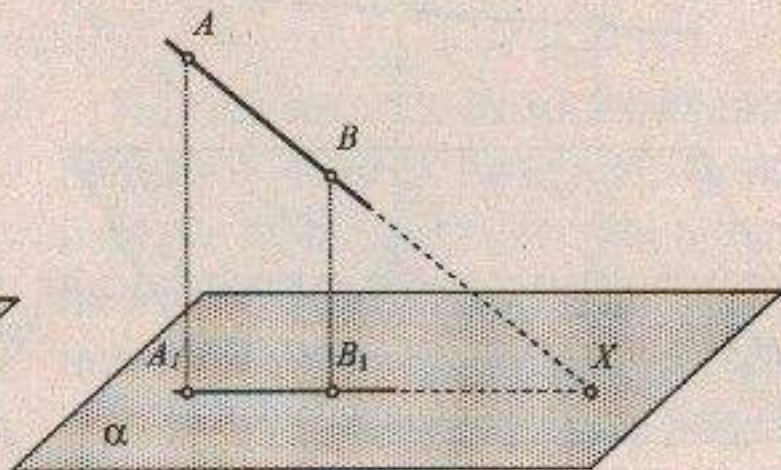


Рис. 49, б

Искомая точка X , очевидно, является точкой пересечения прямых AB и A_1B_1 : $X = (AB) \cap (A_1B_1)$ (рис. 49, б). Действительно, $X \in (A_1B_1)$, и поэтому $X \in \alpha$. Точку X называют иногда «следом» прямой AB на основной плоскости.

Применим задачу 1а) для построения точки X пересечения прямой MN с плоскостью основания призмы. Выберем аппарат внутреннего проектирования. За основную плоскость выберем плоскость нижнего основания призмы — ABC , за направление проектирования — боковое ребро. Графический алгоритм действий показан на рисунке 50.

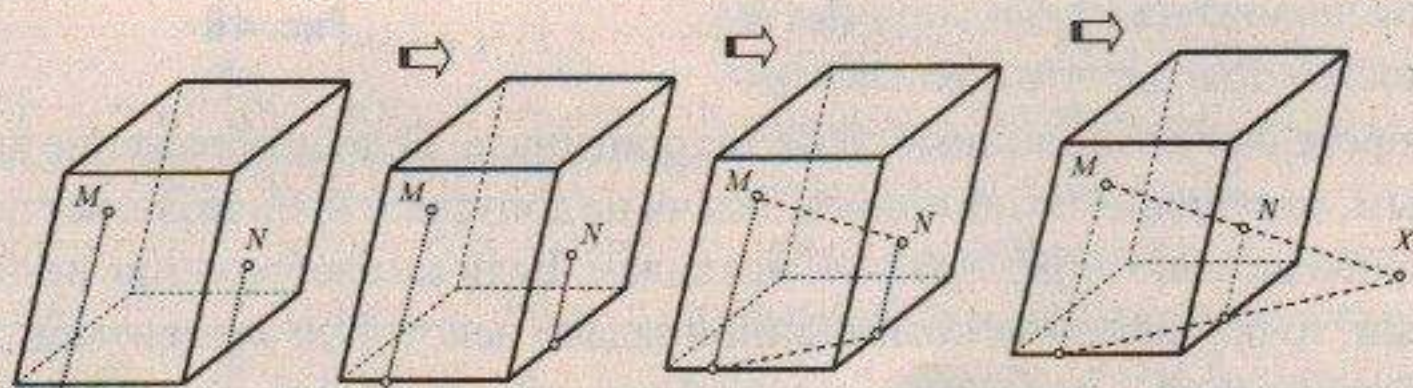


Рис. 50

б) Внутреннее проектирование является центральным

Пусть S — центр внутреннего проектирования (рис. 51, а). Решение задачи такое же, как в задаче 1а), и показано на рисунке 51, б).

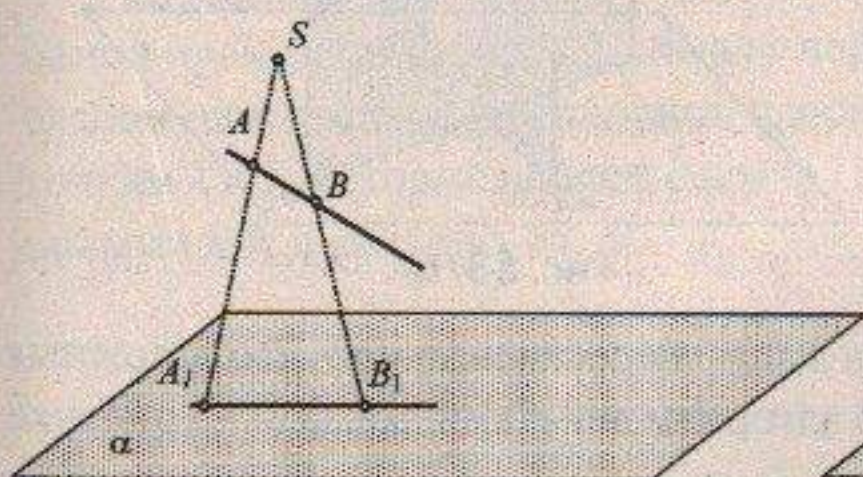


Рис. 51, а

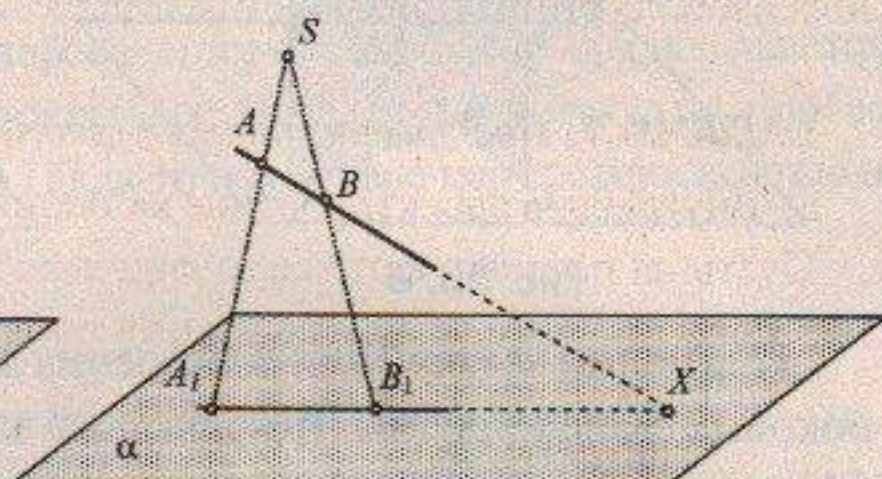


Рис. 51, б

Применим задачу 1б) для построения точки X пересечения прямой MN с плоскостью основания пирамиды. Графический алгоритм действий показан на рисунке 52.

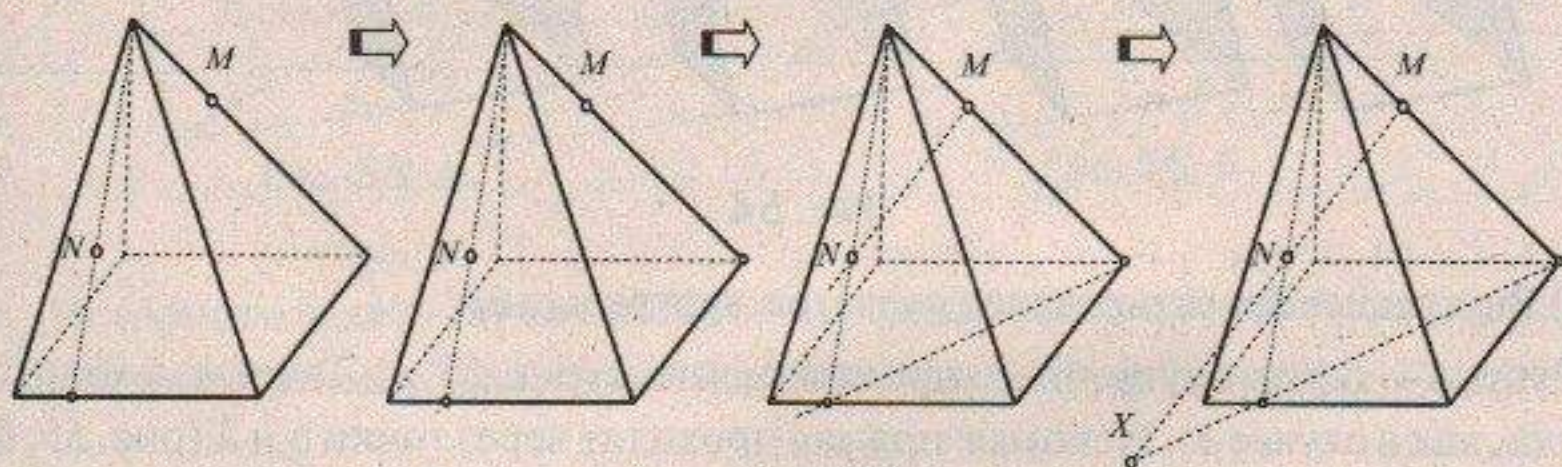


Рис. 52

ЗАДАЧА 2. Построение линии пересечения двух проектирующих плоскостей

а) Внутреннее проектирование является параллельным

Пусть заданы две проектирующие плоскости $\sigma_1 = (AA_1, BB_1)$ и $\sigma_2 = (CC_1, DD_1)$ парой проектирующих прямых (рис. 53, а). Построим прямую $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$.

Очевидно, что s — проектирующая прямая, поэтому достаточно построить одну точку, обозначим ее X . Искомая точка X принадлежит двум пересекающимся прямым A_1B_1 и C_1D_1 , и тогда прямую s проведем параллельно, например, прямой BB_1 (рис. 53, б).

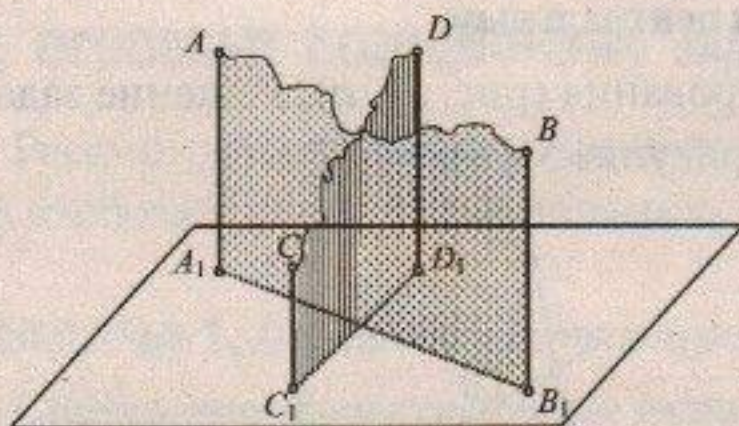


Рис. 53, а

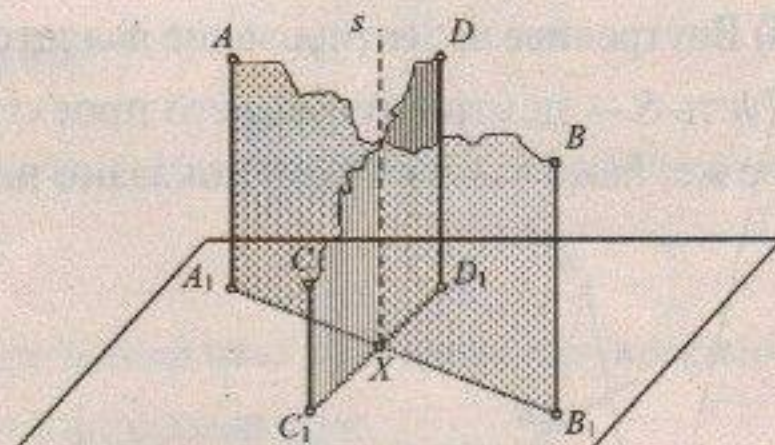


Рис. 53, б

Применим задачу 2 для построения линии пересечения противоположных боковых граней призмы. Графический алгоритм действий показан на рисунке 54.

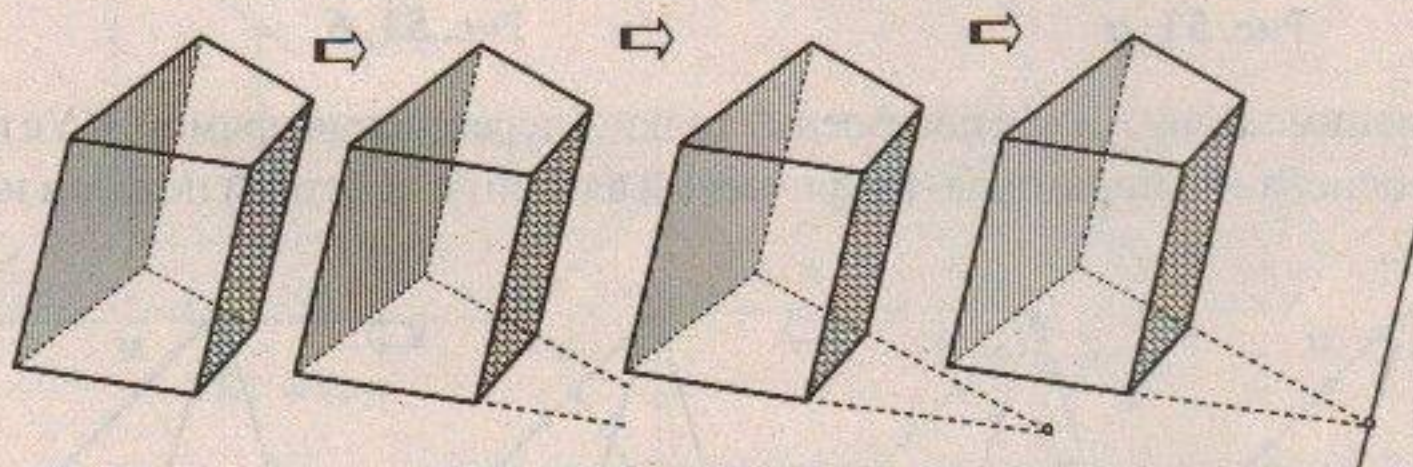


Рис. 54

б) Внутреннее проектирование является центральным

Пусть S — центр внутреннего проектирования (рис. 55, а). Точка X находится так же, как в случае а). Искомая прямая проходит через точки S и X (рис. 55, б).

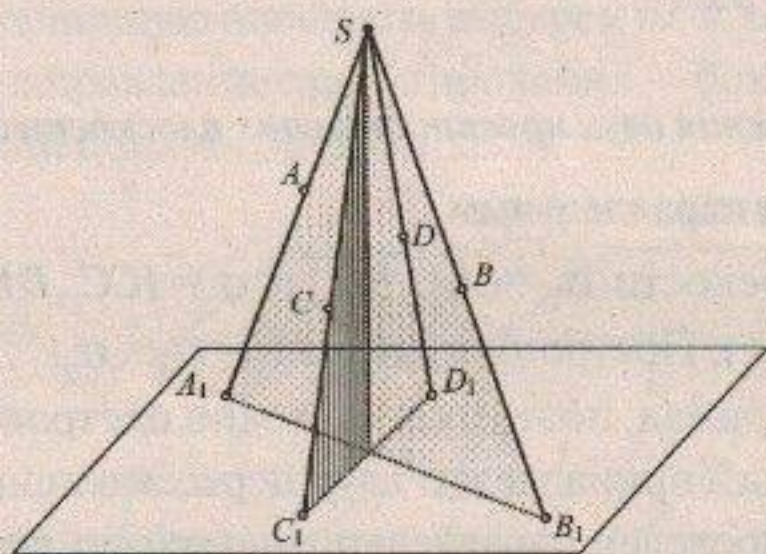


Рис. 55, а

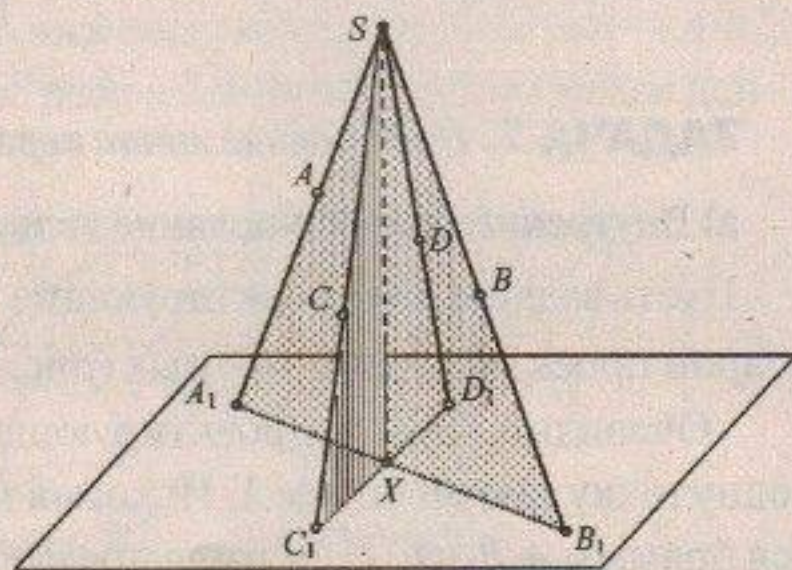


Рис. 55, б

ЗАДАЧА 3. Построение линии пересечения плоскости с основной плоскостью

а) Внутреннее проектирование является параллельным

Пусть задана плоскость $\beta = (MNP)$ тремя точками M, N, P , не лежащими на одной прямой (рис. 56, а). Прямая p пересечения плоскостей β и α называется следом плоскости β на основной плоскости α . Построим прямую p по двум ее точкам X и Y , которые найдем (задача 1) как точки пересечения с плоскостью α прямых MN и MP (рис. 56, б).

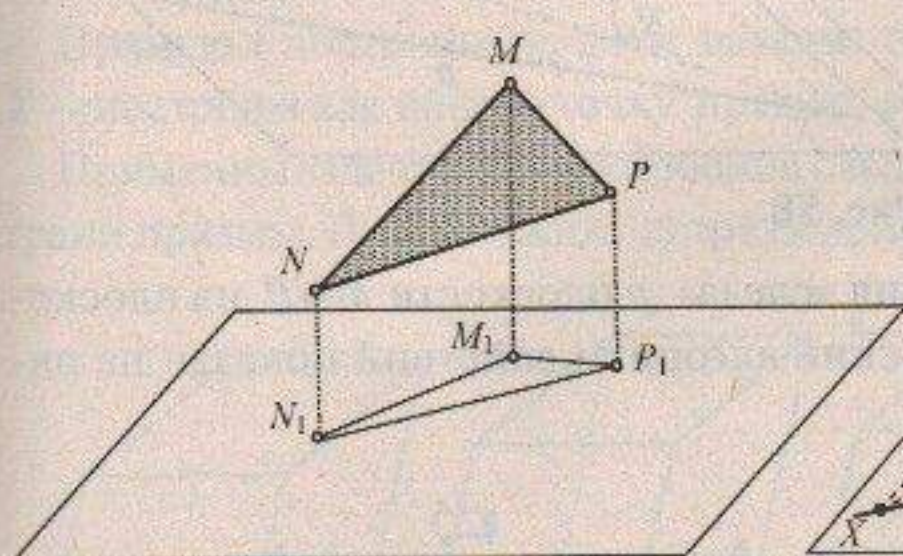


Рис. 56, а

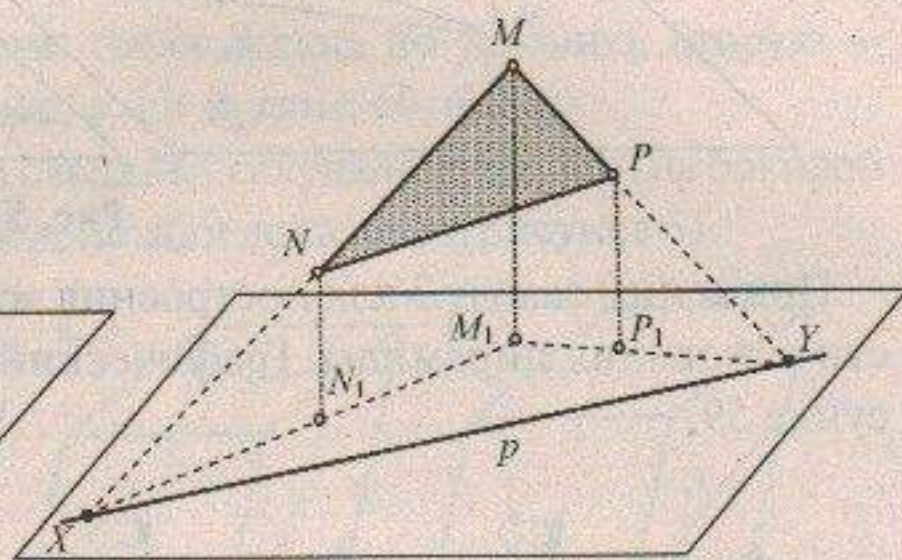


Рис. 56, б

Применим задачу 3а) для построения следа p плоскости MNP на плоскости основания призмы. Графический алгоритм действий показан на рисунке 57.

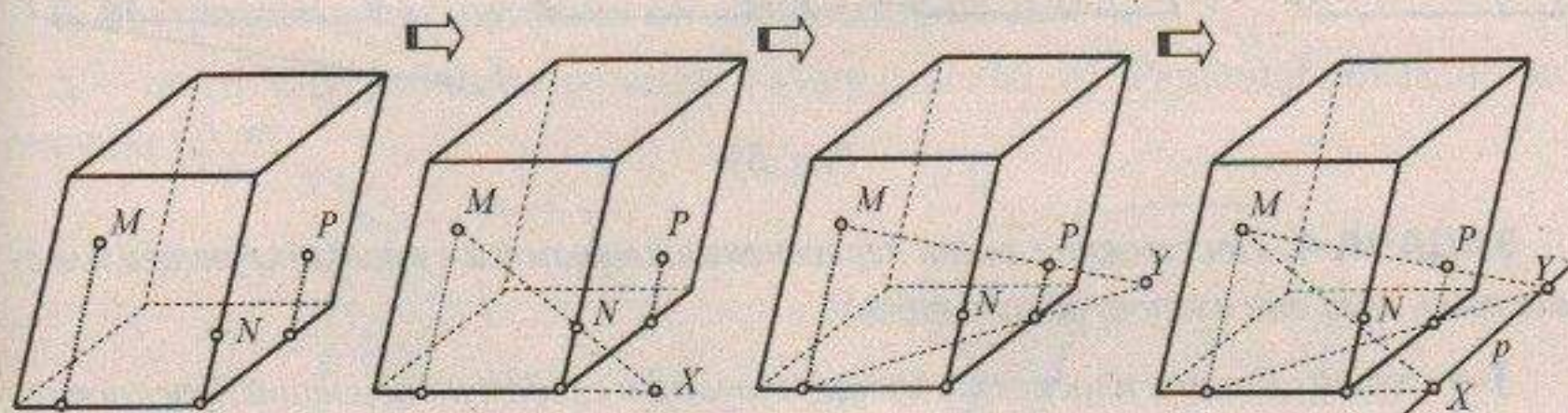


Рис. 57

ЗАДАЧА 3. Построение линии пересечения плоскости с основной плоскостью

а) Внутреннее проектирование является параллельным

Пусть задана плоскость $\beta = (MNP)$ тремя точками M, N, P , не лежащими на одной прямой (рис. 56, а). Прямая p пересечения плоскостей β и α называется следом плоскости β на основной плоскости α . Построим прямую p по двум ее точкам X и Y , которые найдем (задача 1) как точки пересечения с плоскостью α прямых MN и MP (рис. 56, б).

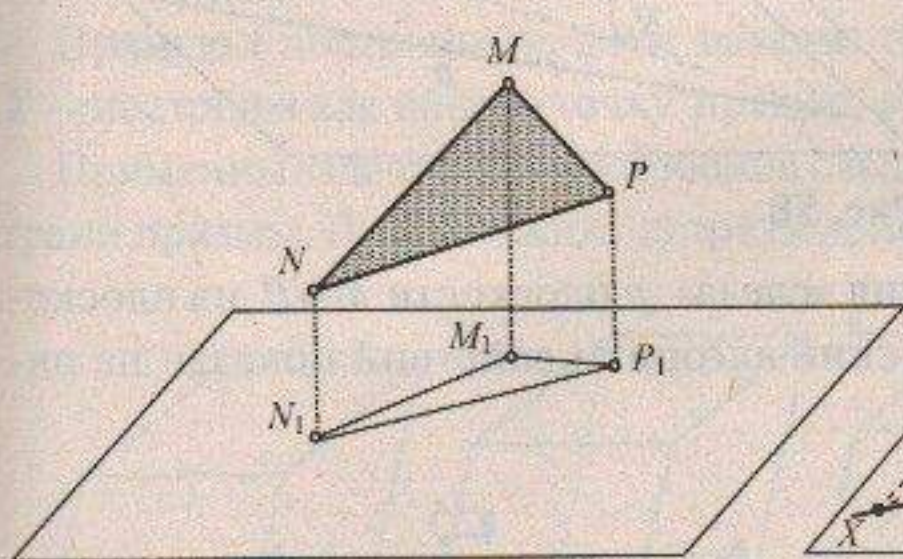


Рис. 56, а

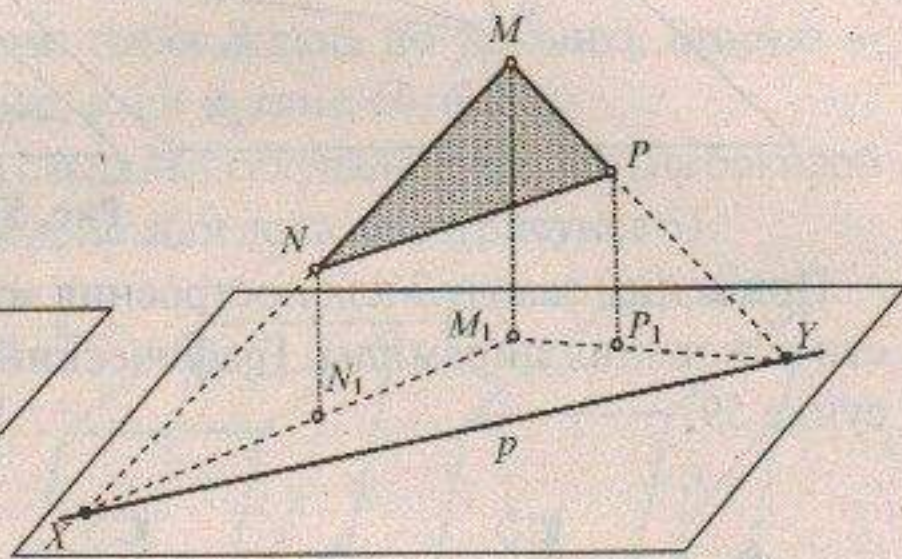


Рис. 56, б

Применим задачу 3а) для построения следа p плоскости MNP на плоскости основания призмы. Графический алгоритм действий показан на рисунке 57.

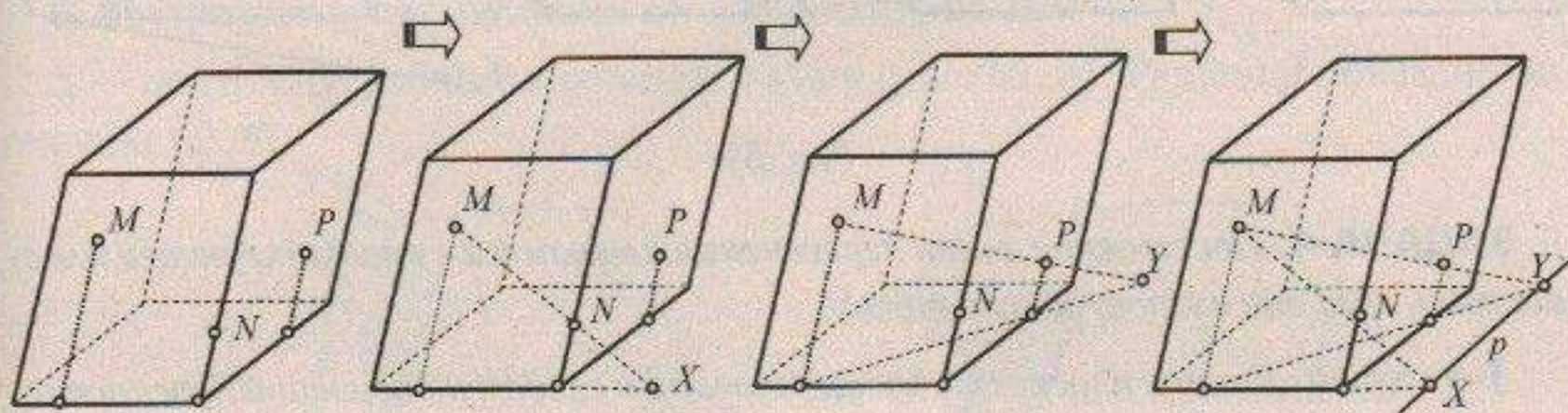


Рис. 57

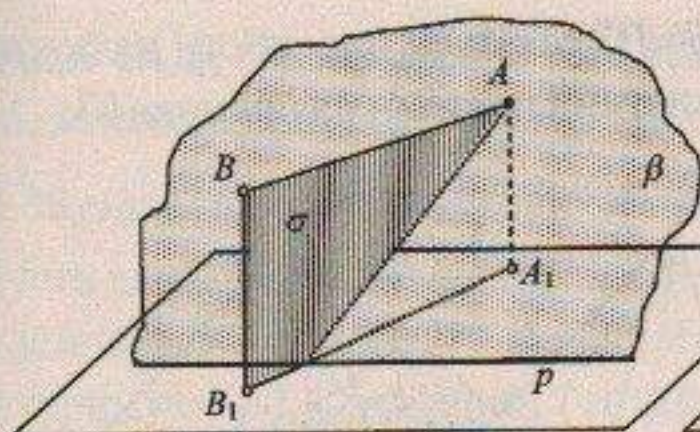


Рис. 60, а

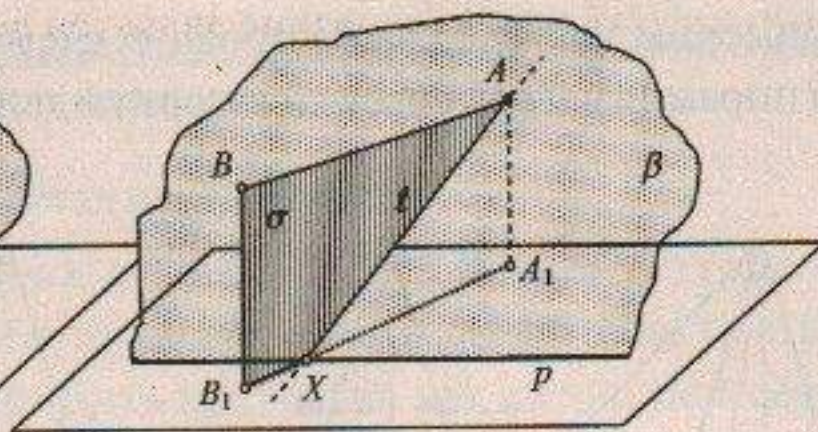


Рис. 60, б

Прямую l построим по двум точкам: точка A дана по условию, вторую — X — построим как общую точку прямых p и A_1B_1 (рис. 60, б).

Применим задачу 4 для построения следа MN секущей плоскости на боковой грани призмы. Графический алгоритм действий показан на рисунке 61.

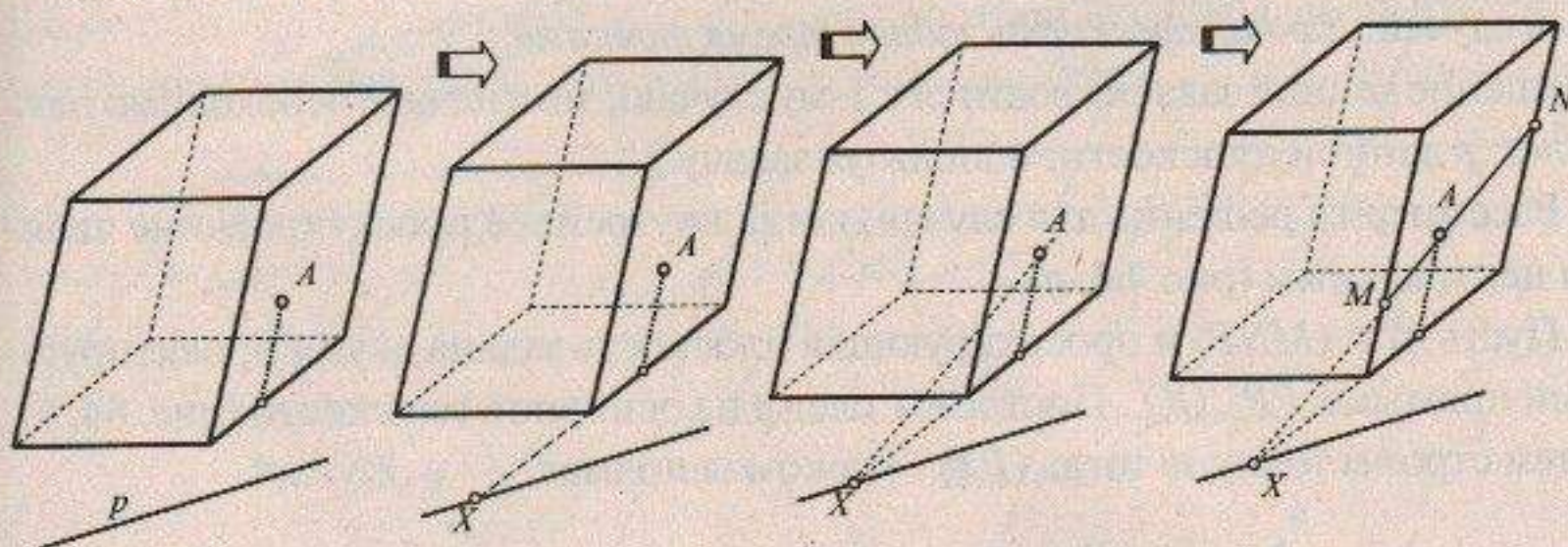


Рис. 61

б) Внутреннее проектирование является центральным

S — центр внутреннего проектирования (рис. 62, а). Решение показано на рисунке 62, б).

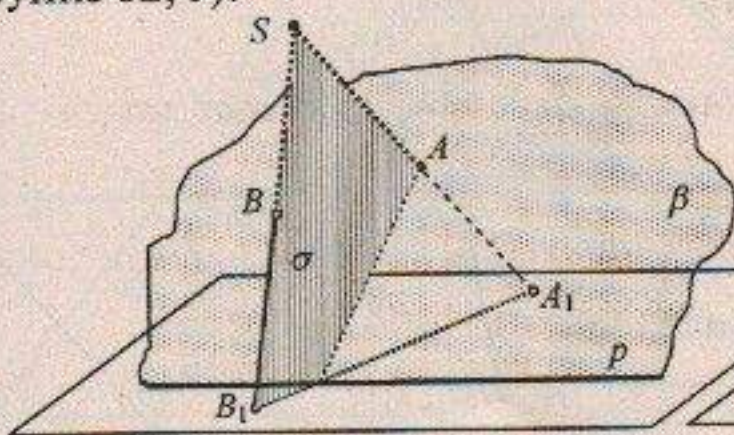


Рис. 62, а

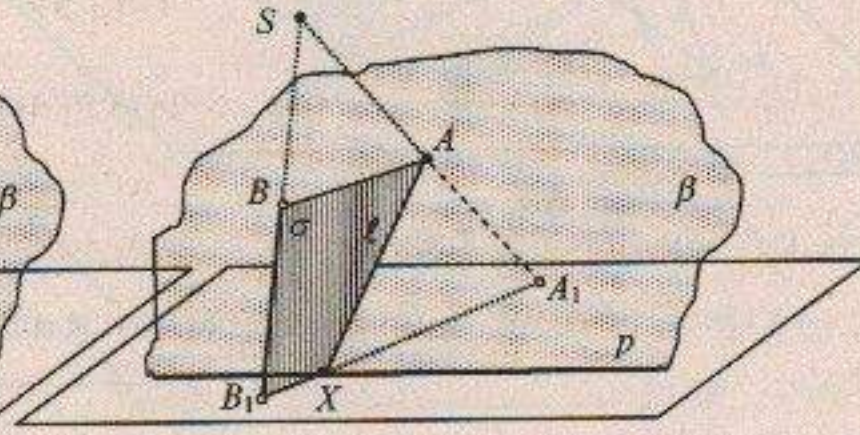


Рис. 62, б

Применим задачу 4 для построения следа PQ секущей плоскости на боковой грани пирамиды. Графический алгоритм действий показан на рисунке 63.

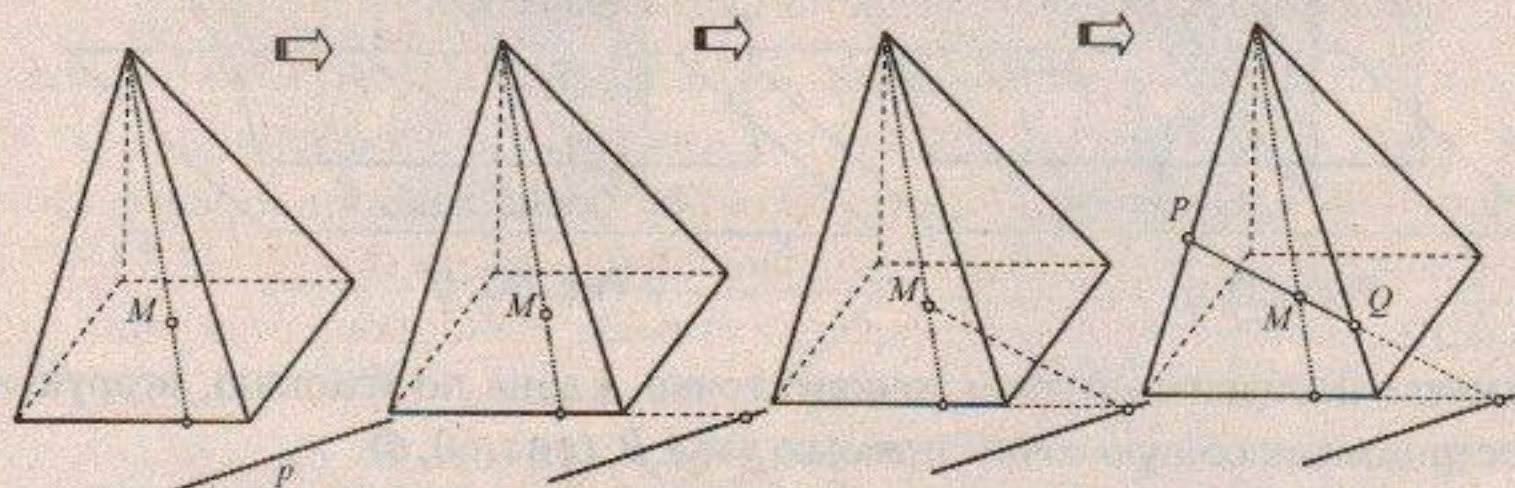


Рис. 63

2-й случай. Данная плоскость задана тремя точками.

Решение данной задачи сводится к 1-му случаю, но в начале необходимо найти след p данной плоскости, используя задачу 3.

Рассмотрим решение для случая, когда внутреннее проектирование является центральным (рис. 64, а).

Пусть $\beta = (MNP)$ и проектирующая плоскость задана двумя проектирующими прямыми PP_1, QQ_1 . Построим след p на основной плоскости (рис. 64, б), а затем строим точку, и тогда (PX) — искомая прямая.

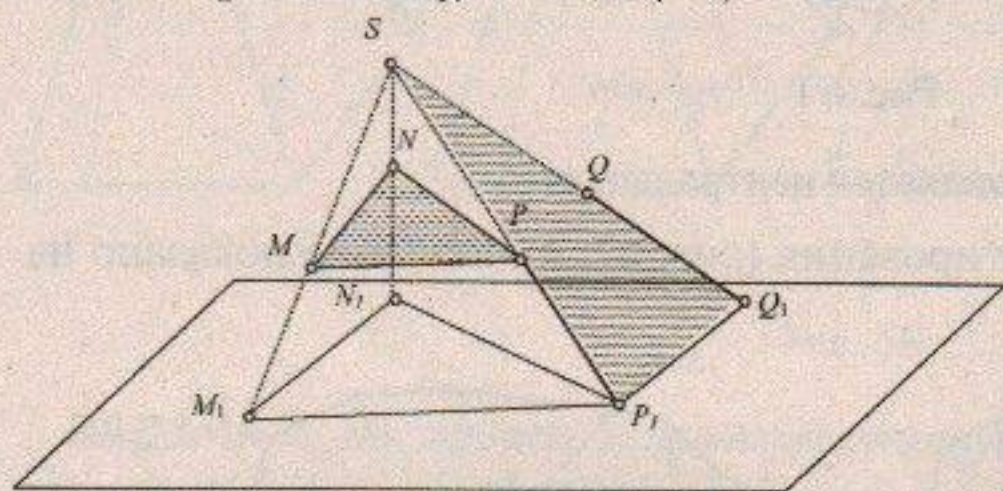


Рис. 64, а

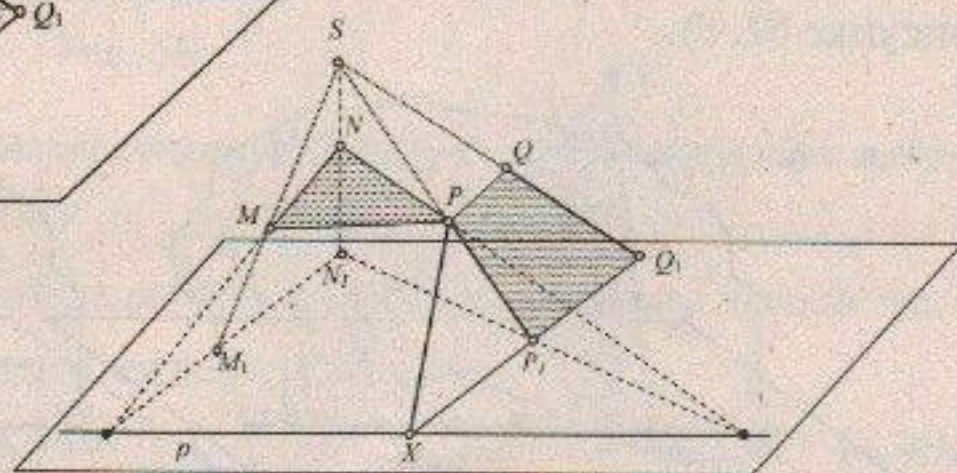


Рис. 64, б

ЗАДАЧА 5. Построение точки пересечения проектирующей прямой с плоскостью, заданной тремя точками

а) Внутреннее проектирование является параллельным

Пусть даны: проектирующая прямая AA_1 и плоскость $\beta = (MNP)$ (рис. 65а). Найдем точку $X = (AA_1) \cap \beta$. Для построения точки X достаточно построить одну прямую — l . Очевидно, l может быть построена как линия пересечения двух плоскостей: данной, β , и проектирующей плоскости $\sigma = (MM_1, AA_1)$. Для построения прямой l найдем сначала прямую YY_1 — линию пересечения двух проектирующих плоскостей: σ и $\sigma_1 = (NN_1, PP_1)$, а затем точку $Y = (YY_1) \cap (NP)$. Тогда искомая прямая $l = (MY)$ и точка $X = l \cap (AA_1)$ (рис. 65, б).

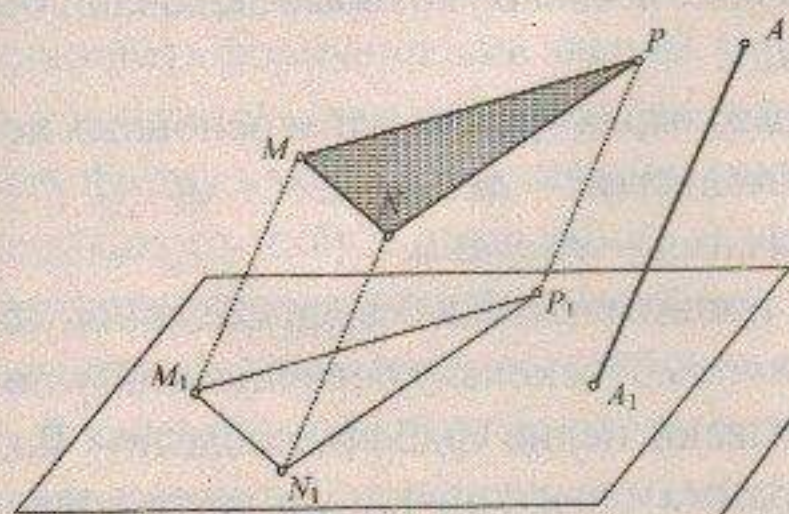


Рис. 65, а

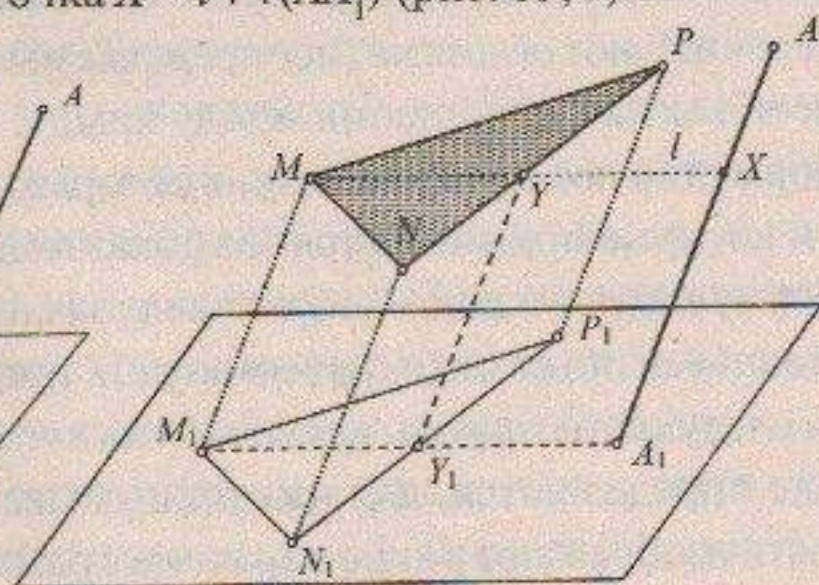


Рис. 65, б

б) Внутреннее проектирование является центральным

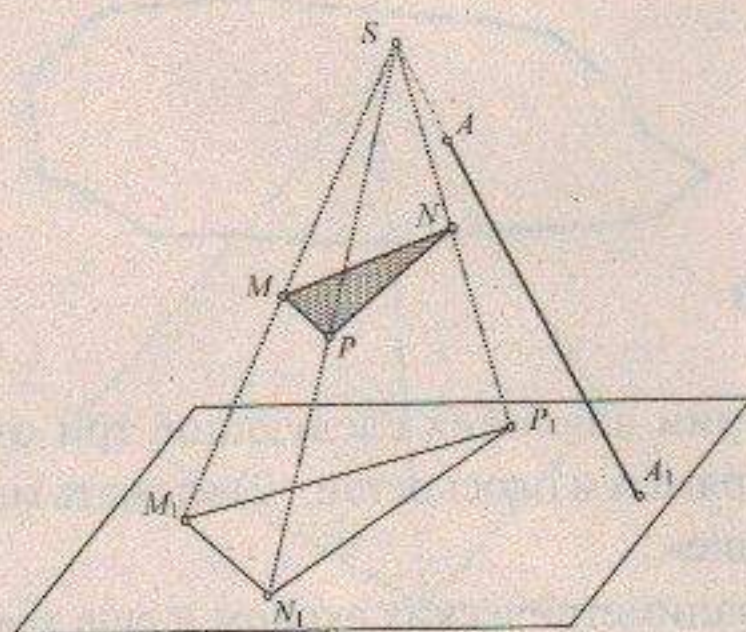


Рис. 66

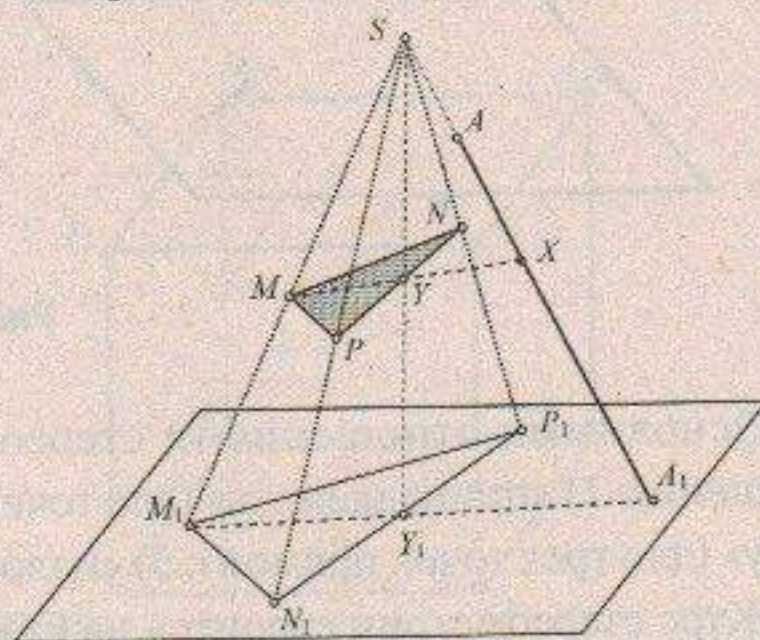


Рис. 67

Пусть S — центр внутреннего проектирования (рис. 66). Решение аналогично случаю a) (рис. 67). Здесь проектирующая прямая SU_1 является линией пересечения проектирующих плоскостей $\sigma = (MM_1, AA_1)$ и $\sigma_1 = (NN_1, PP_1)$ (задача 26).

2.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

2.3.1. Аксиоматический подход к построению стереометрии

В основу построения систематического курса стереометрии положен аксиоматический метод, суть которого состоит из этапов:

1. Перечисляют *основные* (неопределяемые) *понятия*, которые включают основные объекты и отношения между ними.
2. Формулируют предложения, в которых выражены свойства основных понятий и которые принимаются без доказательства, — *аксиомы*.
3. Формулируют и доказывают предложения — *теоремы*.

Основными объектами стереометрии, принимаемыми без определения, являются следующие: *точка*, *прямая* и *плоскость*. Поскольку перечисленные понятия не определяются, для них придумывают некие «рабочие модели». Так, плоскость изображают в виде параллелограмма или какой-нибудь другой плоской фигуры (рис. 68).

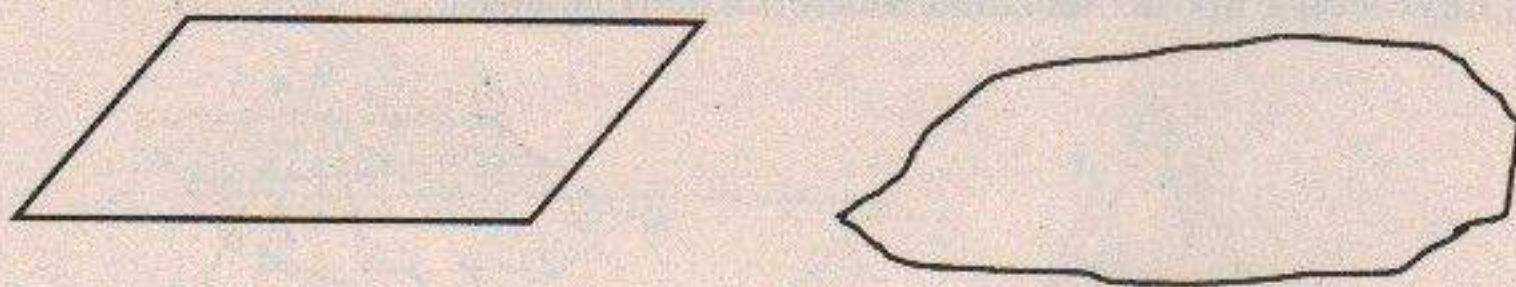


Рис. 68

Основными отношениями стереометрии являются следующие три отношения: 1) «принадлежать» (для точек, прямых и плоскостей); 2) «лежать между» (для трех точек прямой); 3) «наложение».

Курс стереометрии строится на базе планиметрических аксиом и еще трех аксиом, выражающих свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве.

- C₁.** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
- C₂.** Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки прямой принадлежат этой плоскости.
- C₃.** Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Поскольку не существует инструментов, с помощью которых можно было бы провести плоскость в пространстве, в требованиях теорем и задач термин «провести» обычно означает «доказать существование». Такой подход к требованию задачи, конечно же, имеет право на существование, поскольку позволяет использовать формулировки аксиом, ранее доказанных теорем, чтобы применить их к доказательствам. Однако как быть с решением задачи, в которой надо узнать форму какого-либо сечения многогранника плоскостью или вычислить меру какого-нибудь двугранного угла многогранника? Необходимо научиться «интерпретировать» основные объекты и основные отношения на модели, т.е. овладеть навыком придавать конкретный смысл основным объектам.

В качестве модели рассмотрим известные многогранники — тетраэдр и параллелепипед. Тетраэдр (треугольная пирамида) $ABCD$ имеет 4 грани, 6 ребер, 4 вершины (рис. 69). Каждая грань тетраэдра — треугольник — может служить моделью «плоскости», каждое из ребер AC , BC , AB , AD , DC , BD может служить моделью «прямой», а каждая из вершин A , B , C , D — моделью «точки».

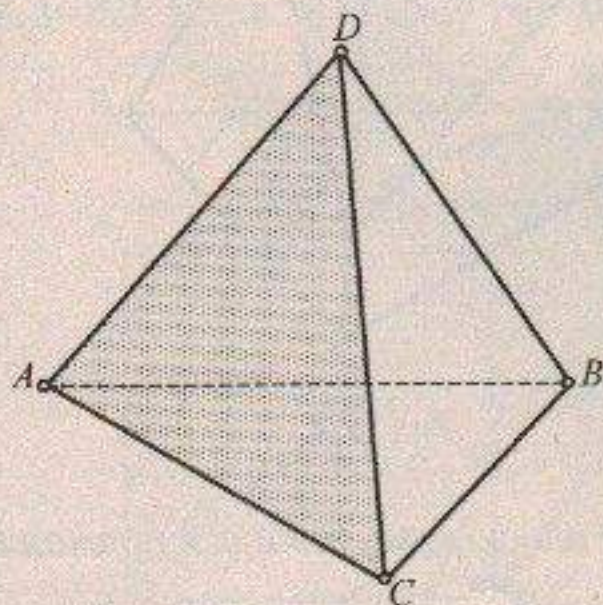


Рис. 69

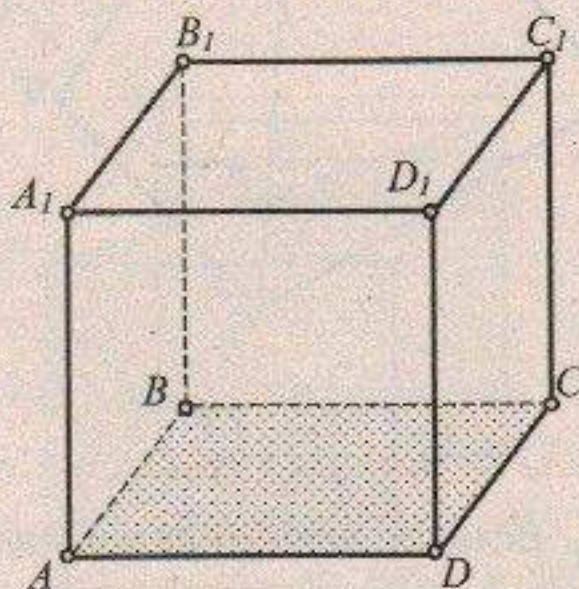


Рис. 70

Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 70) имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин. Каждая грань параллелепипеда — параллелограмм, может служить моделью «плоскости», каждое ребро — моделью «прямой», каждая вершина — моделью «точки».

Неопределяемое отношение «принадлежать» может быть интерпретировано на любой из моделей следующим образом: «точка» принадлежит «прямой», если вершина многогранника принадлежит ребру; «точка» принадлежит «плоскости», если вершина многогранника принадлежит грани; «прямая» принадлежит «плоскости», если ребро принадлежит грани. Например, на модели параллелепипеда (рис. 70) «точка» A принадлежит «прямой» AB , «точка» C принадлежит «плоскости» ABC , «прямая» BC принадлежит «плоскости» ABC .

Далее покажем, как можно интерпретировать на моделях аксиомы стереометрии.

|| C_1 . Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость.

На рисунке 71 даны три точки M , N и P на ребрах пирамиды $SABC$. Изобразим плоскость, содержащую данные точки (рис. 72).

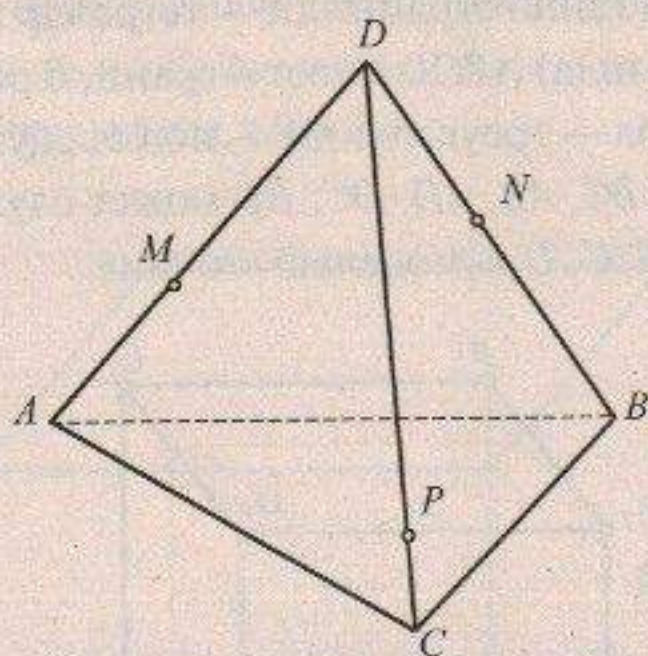


Рис. 71

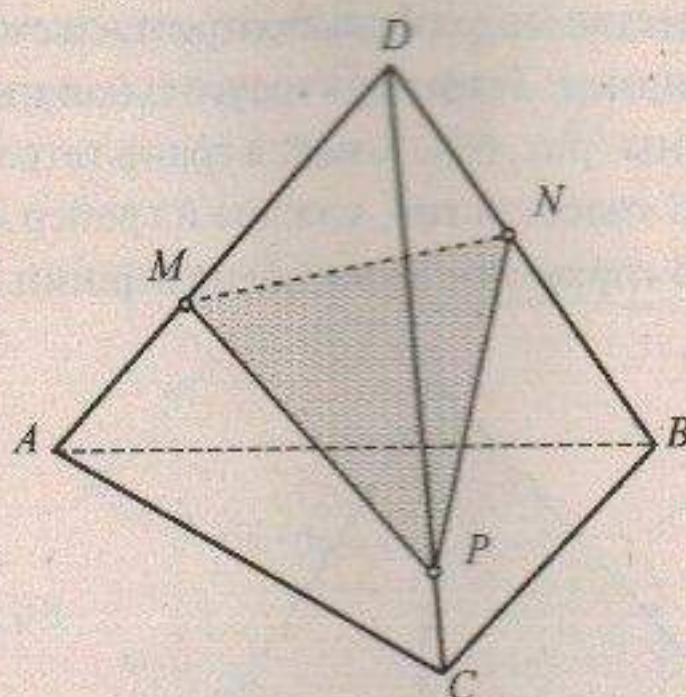


Рис. 72

|| C_2 . Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

На рисунке 73 даны две точки M и N в плоскости грани ADC пирамиды $SABC$. Изобразим прямую, содержащую данные точки и принадлежащую данной плоскости (рис. 74).

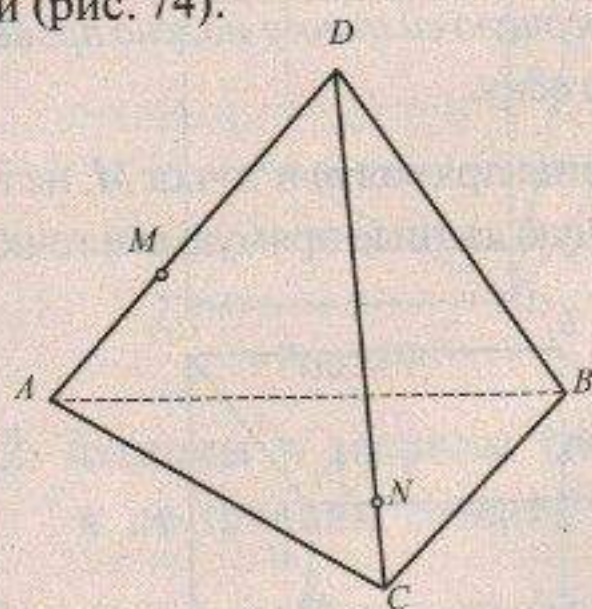


Рис. 73

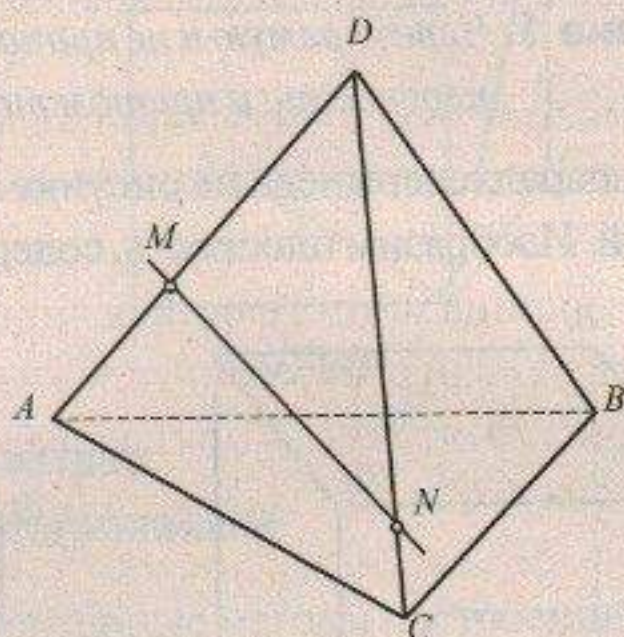


Рис. 74

С₃. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

На рисунке 75 даны две плоскости диагональных сечений AA_1C и BB_1D , имеющие общую точку O прямоугольного параллелепипеда. Найдем еще одну общую точку X данных плоскостей.

Искомую точку будем искать как точку пересечения двух прямых, одна из которых лежит в одной из плоскостей, а другая — в другой, причем обе прямые должны принадлежать одной плоскости. Такими прямыми, очевидно, являются AC и BD . Итак, $X = (AC) \cap (BD)$ (рис. 76).

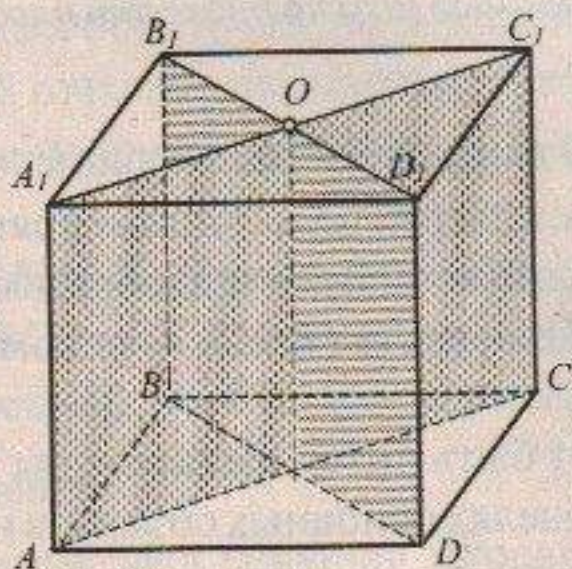


Рис. 75

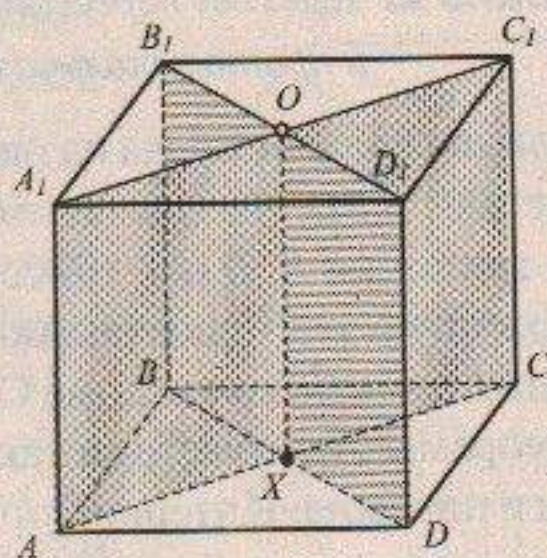


Рис. 76

Сформулируем основные следствия из аксиом стереометрии и интерпретируем их на моделях призм и пирамид.

Следствие 1. *Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.*

На модели параллелепипеда на рисунке 77 даны прямая m и точка M , не принадлежащая ей. Изобразим плоскость, содержащую данные прямую m и точку M .

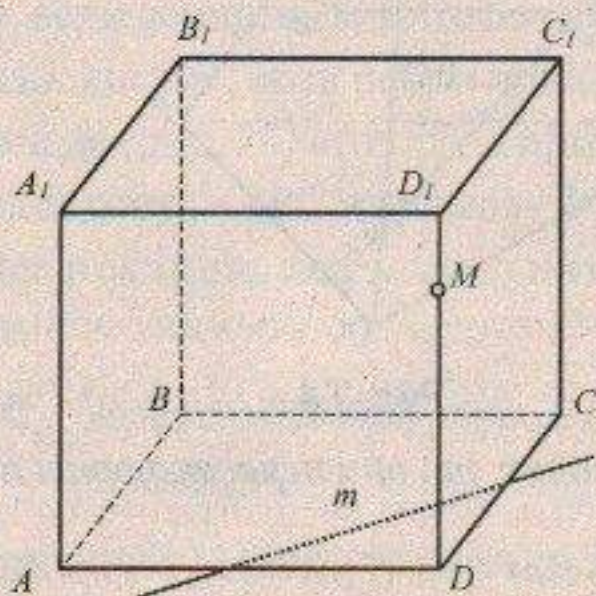


Рис. 77

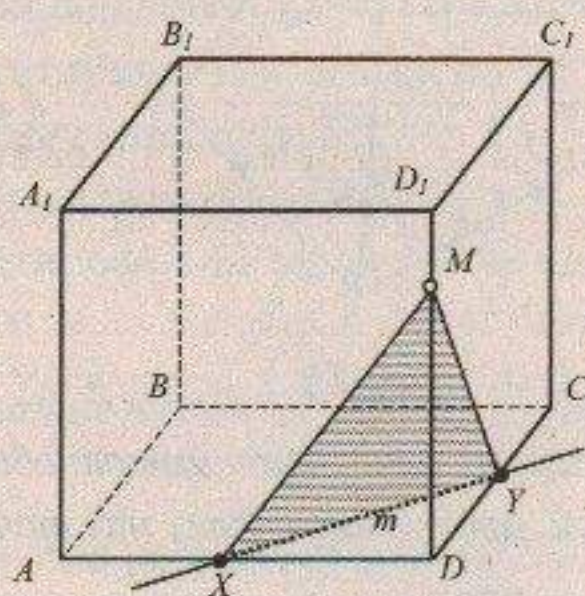


Рис. 78

Выберем две точки X и Y (рис. 78) на данной прямой и изобразим плоскость, содержащую три точки M , X и Y . По аксиоме C_1 такая плоскость существует. Докажем, что плоскость (MXY) искомая. Действительно, она содержит данную точку M по построению, а прямую m — по аксиоме C_2 .

Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.*

На модели параллелепипеда на рисунке 79 даны две пересекающиеся в точке D прямые: DC_1 и BD . Изобразим плоскость, содержащую данные прямые.

Выберем три точки B , D и C_1 (рис. 80) на данных прямых и изобразим плоскость, содержащую эти точки (аксиома C_1). Плоскость (BDC_1) — искомая, содержит данные прямые по аксиоме C_2 .

Другие теоремы стереометрии также могут быть интерпретированы на моделях призм и пирамид. Интерпретация на моделях основных объектов и отношений стереометрии позволяет разработать технологии решения позиционных задач на построение на полных чертежах.

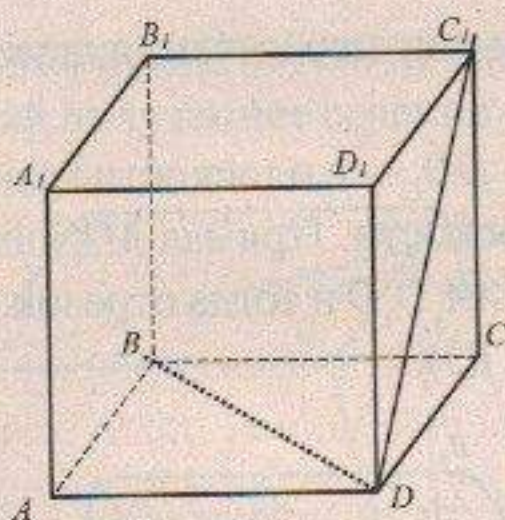


Рис. 79

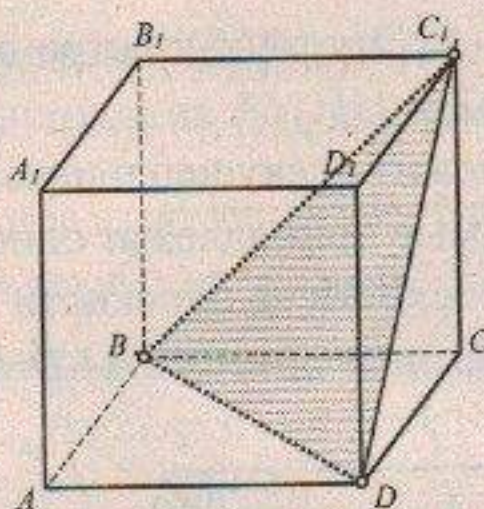


Рис. 80

2.3.2. Аксиомы и теоремы стереометрии в построении сечений многогранников

Рассмотрим так называемые элементарные методы построения сечений многогранников. К числу элементарных методов мы отнесем те, в которых для построения сечений достаточно применить аксиомы и теоремы стереометрии (2.3.1). Будем искать следы секущей плоскости в гранях многогранника по двум точкам пересечения ребер с секущей плоскостью. В свою очередь, каждая такая точка будет построена как точка пересечения двух прямых, одна из которых лежит в секущей плоскости, а другая — в плоскости грани, причем обе прямые принадлежат одной плоскости. Отыскать такие прямые в данном многограннике — не самое простое дело в решении задачи.

Предлагаем систему упражнений на применение аксиом и теорем стереометрии в решении задач на построение сечений призм и пирамид. Выстраивая систему, учтем, что секущая плоскость может быть задана одним из следующих трех способов: тремя не лежащими на одной прямой точками; прямой и не принадлежащей ей точкой; двумя прямыми.

ЗАДАЧА 1. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M , N и P на его ребрах (рис. 81).

Решение.

Найдем след секущей плоскости в грани $AA_1 D_1 D$. Одна общая точка есть — это M , най-

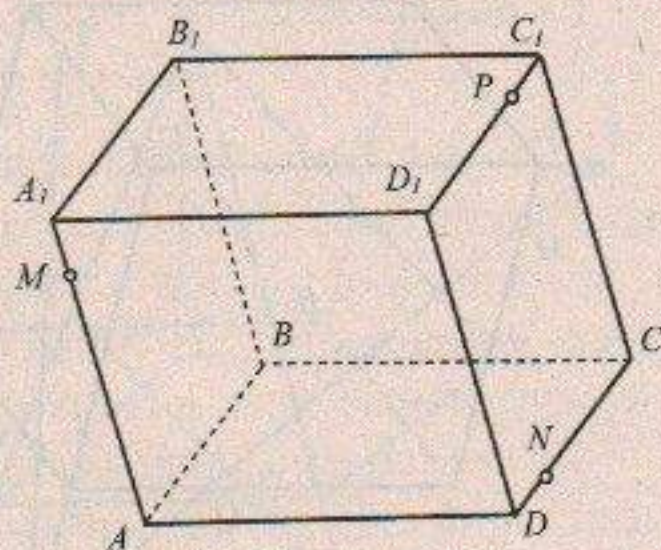


Рис. 81

дем еще одну — X . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — PN и DD_1 (рис. 82).

Прямая PN лежит в секущей плоскости, а DD_1 — в плоскости грани AA_1D_1D , причем обе прямые принадлежат одной плоскости. Прямая MX является следом секущей плоскости на плоскости грани AA_1D_1D и тогда отрезок MQ — следом секущей плоскости в грани AA_1D_1D (рис. 83).

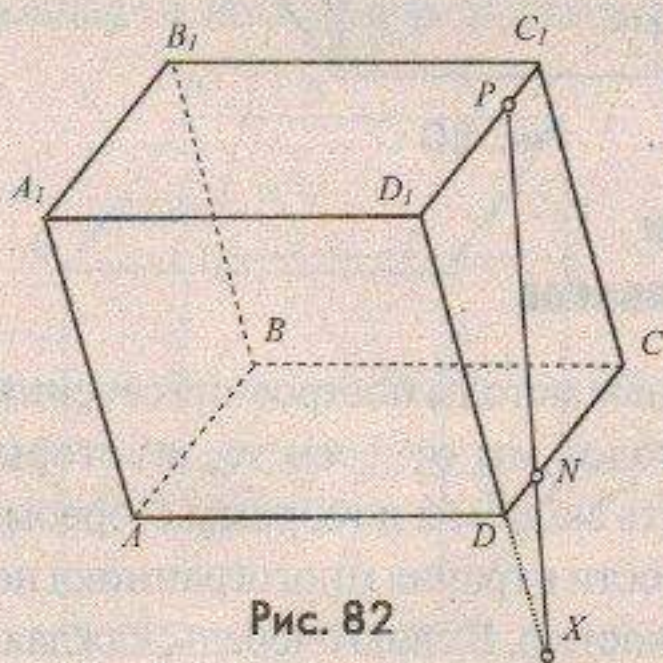


Рис. 82

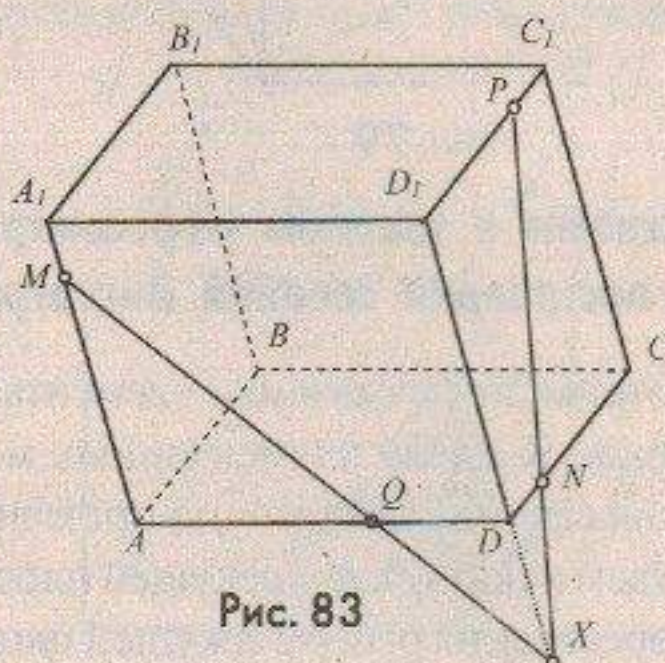


Рис. 83

Далее найдем след секущей плоскости в грани $A_1B_1C_1D_1$. Одна общая точка есть — это P , найдем еще одну — Y . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — MX и A_1D_1 (рис. 84). Прямая PY является следом секущей плоскости на плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$ и тогда отрезок PS — следом секущей плоскости в грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 85, а). Соединив точки M и S , получим след в грани

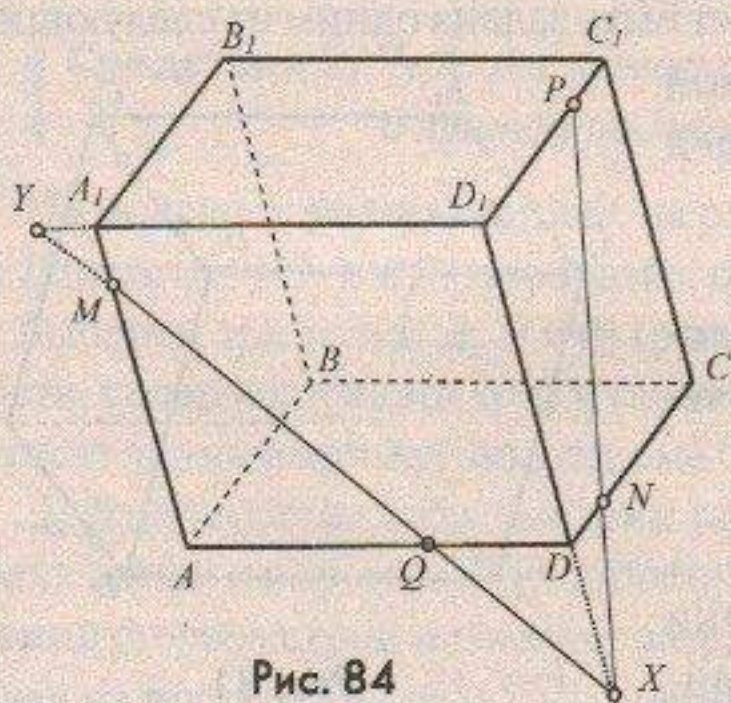


Рис. 84

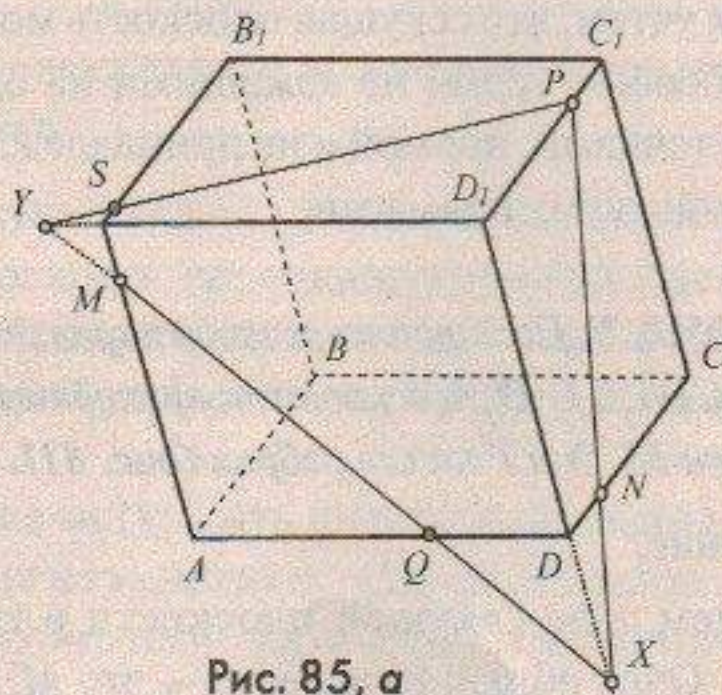


Рис. 85, а

AA_1B_1B , а соединив Q и N , получим след в грани $ABCD$ (рис. 85, б). Показываем штриховкой полученное сечение — пятиугольник $PNQMS$ (рис. 86).

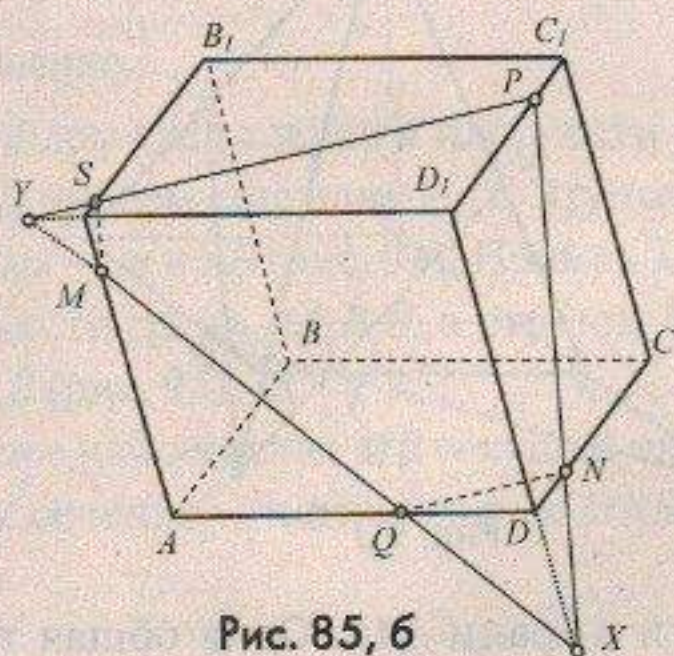


Рис. 85, б

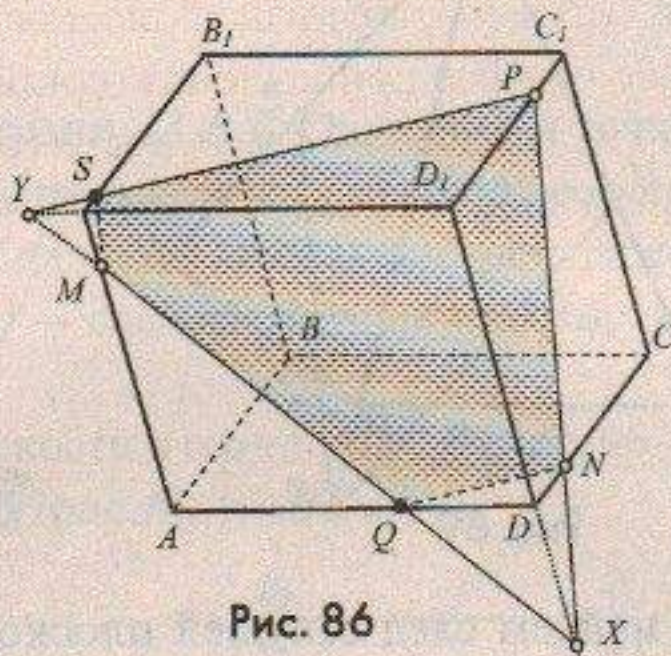


Рис. 86

ЗАДАЧА 2. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки M , N и P на ее ребрах (рис. 87).

Решение.

Найдем след секущей плоскости в грани SDC . Одна общая точка есть — это P , найдем еще одну — X . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — MN и SD (рис. 88). Прямая MN лежит в секущей плоскости, а SD — в плоскости грани SDC , причем обе прямые принадлежат одной плоскости.

Прямая PX является следом секущей плоскости на плоскости грани SDC и тогда отрезок PQ — следом секущей плоскости в грани SDC (рис. 89).

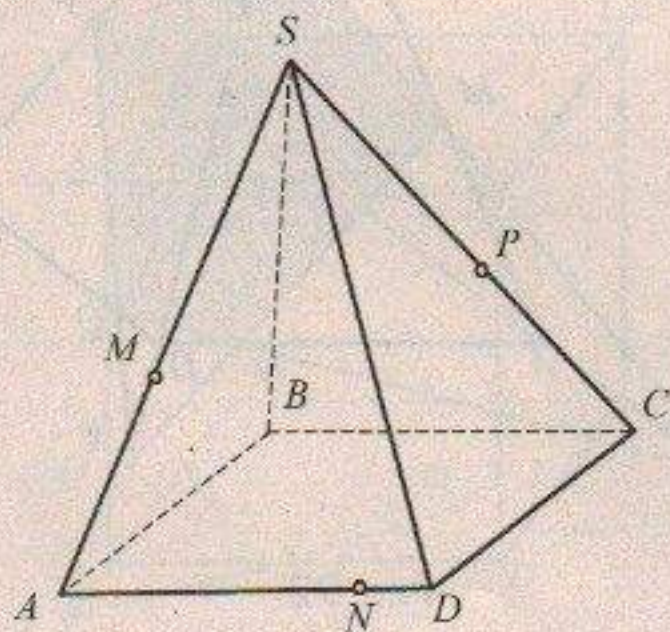


Рис. 87

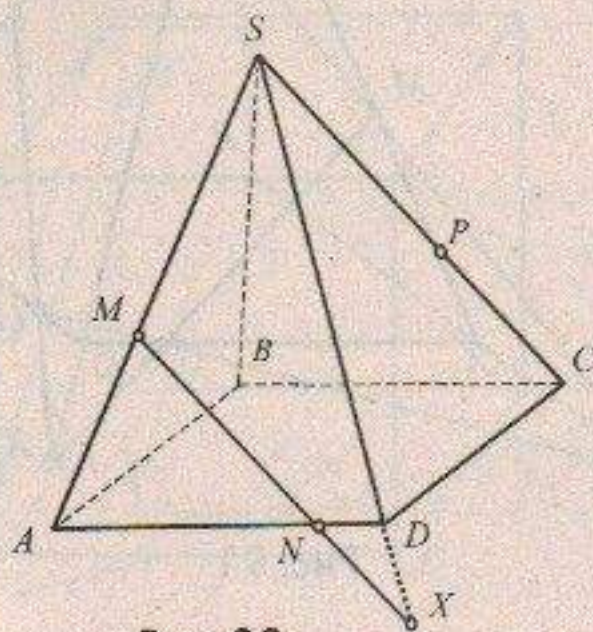


Рис. 88

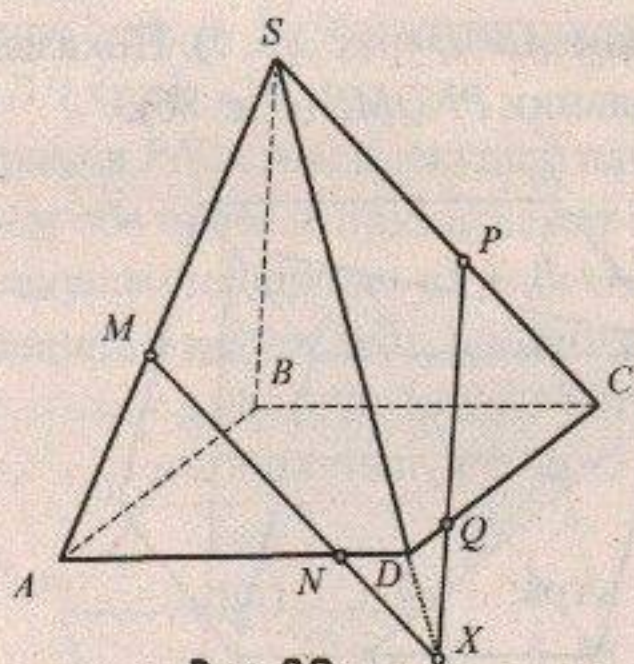


Рис. 89

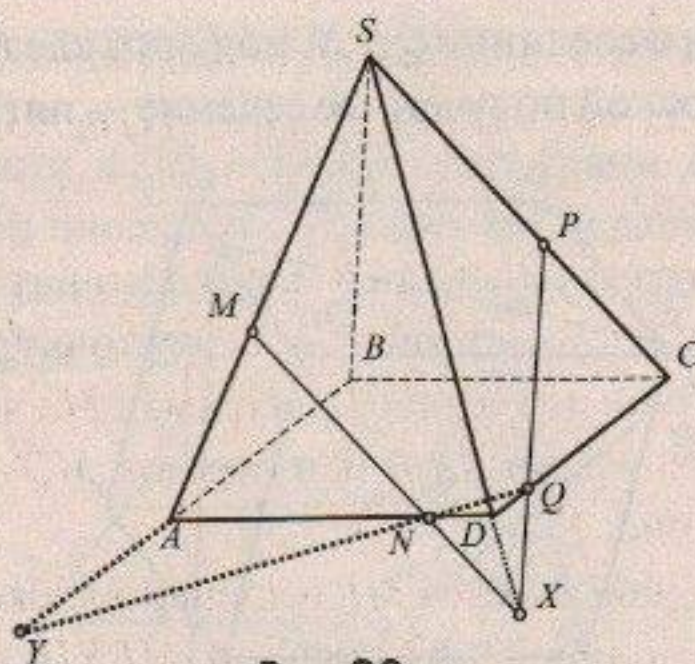


Рис. 90

Далее найдем след секущей плоскости в грани SAB . Одна общая точка есть — это M , найдем еще одну — Y . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — AB и NQ (рис. 90).

Прямая MY является следом секущей плоскости на плоскости грани SAB , и тогда отрезок MR — следом секущей плоскости в грани SAB (рис. 91). Соединив точки P и R , получим след в грани SBC . Показываем штриховкой полученное сечение — пятиугольник $PQNMR$ (рис. 92).

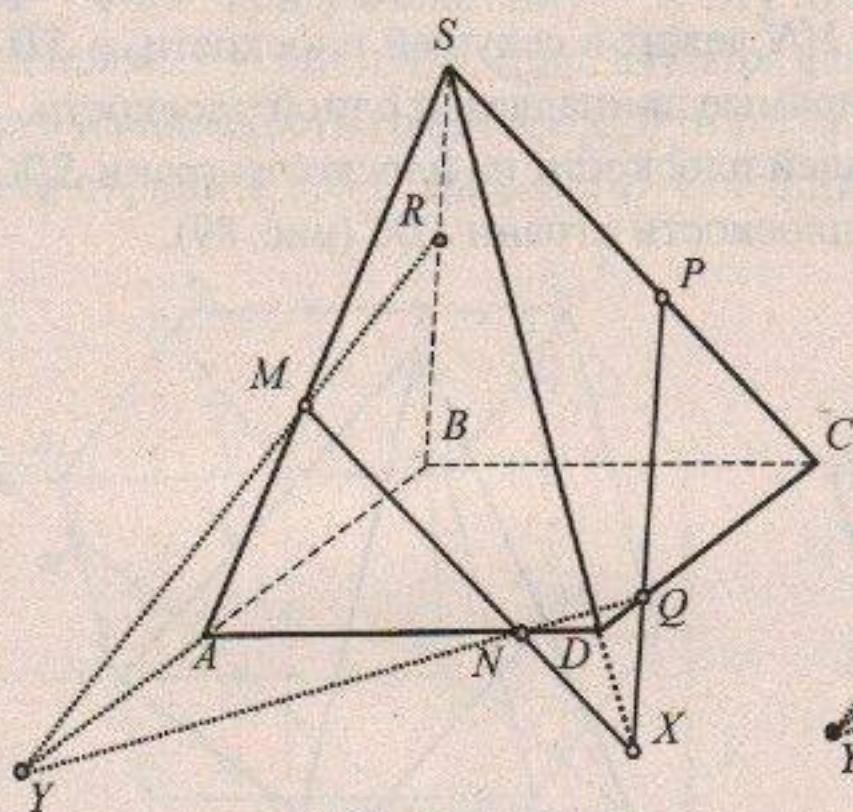


Рис. 91

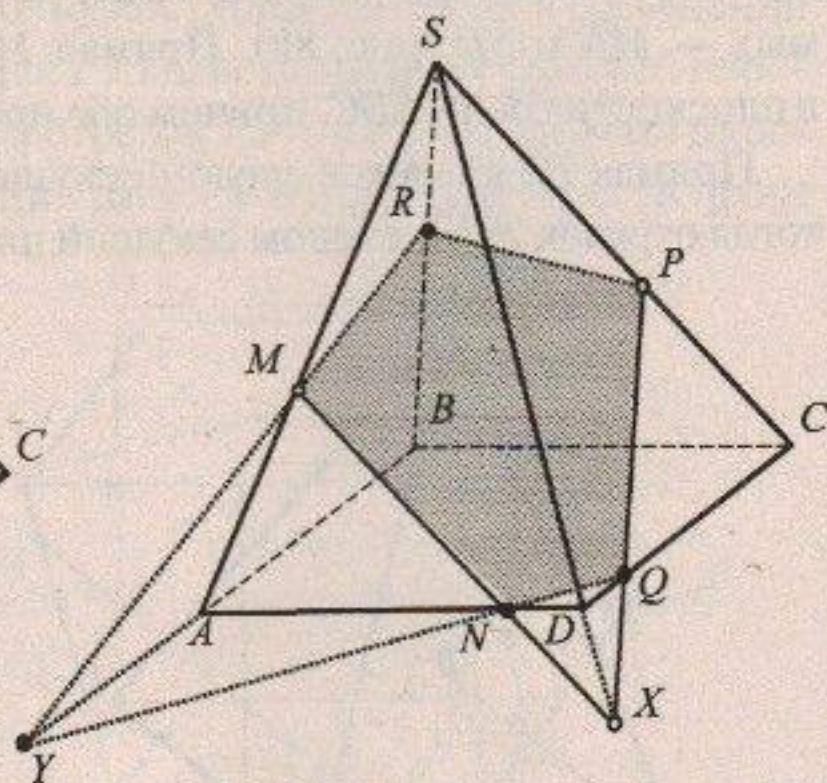


Рис. 92

ЗАДАЧА 3. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, содержащей точку M и прямую m (рис. 93).

Решение.

Найдем след секущей плоскости в грани $AA_1 B_1 B$. Одна общая точка есть — это M , найдем еще одну — X . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — m и AB (рис. 94). Прямая MX является следом секущей плоскости на плоскости грани $AA_1 B_1 B$, а отрезок MQ — следом секущей плоскости в грани $AA_1 B_1 B$ (рис. 95).

Далее найдем след MR секущей плоскости в грани $BB_1 C_1 C$ (рис. 96–97). Искомое сечение — пятиугольник $MRSTQ$ (рис. 98, а–98, в).

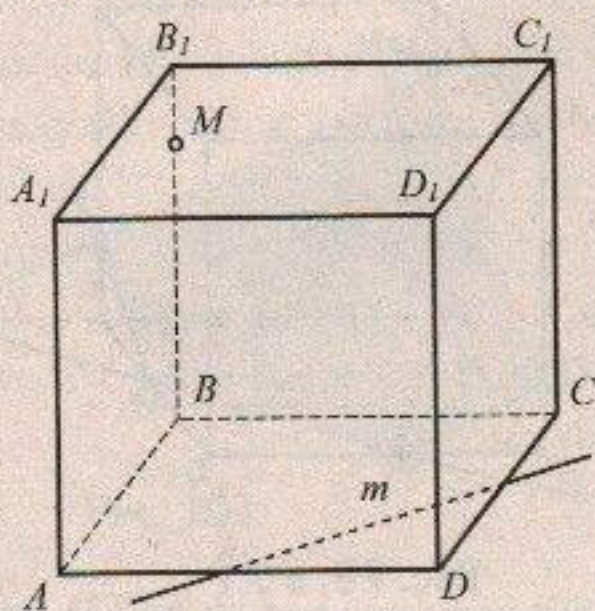


Рис. 93

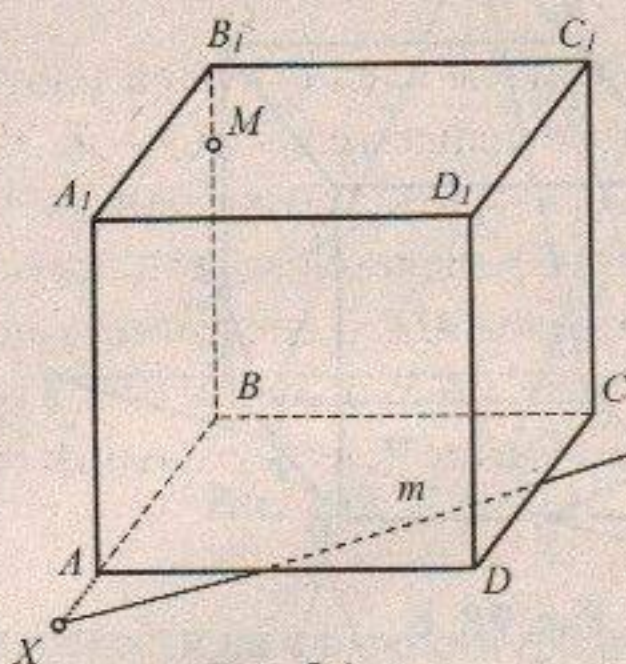


Рис. 94

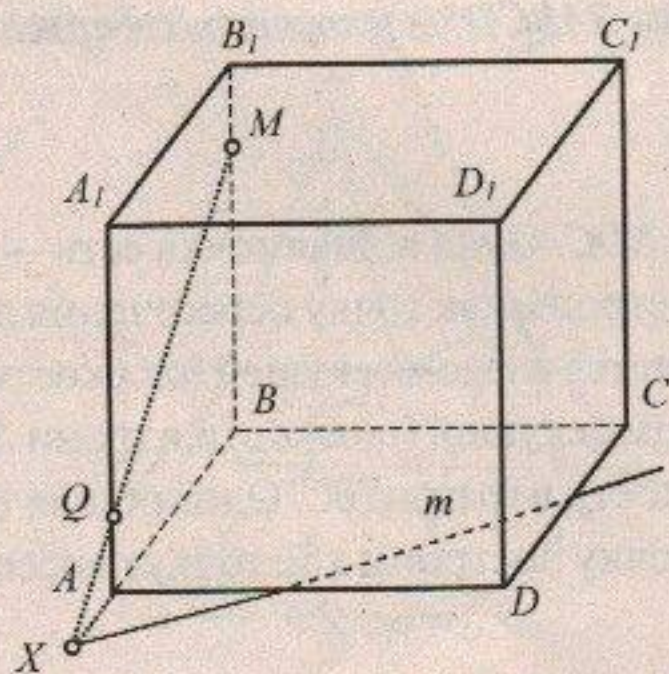


Рис. 95

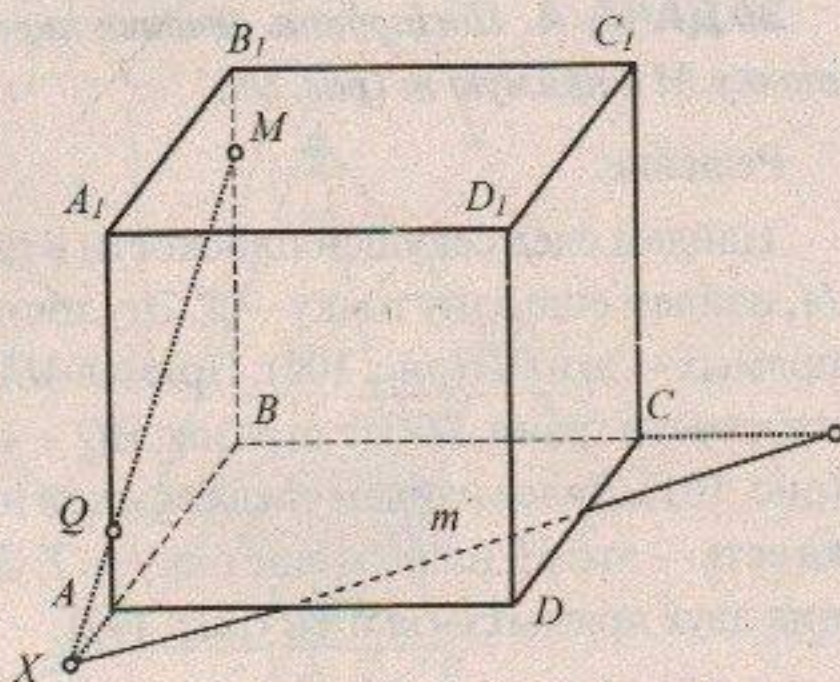


Рис. 96

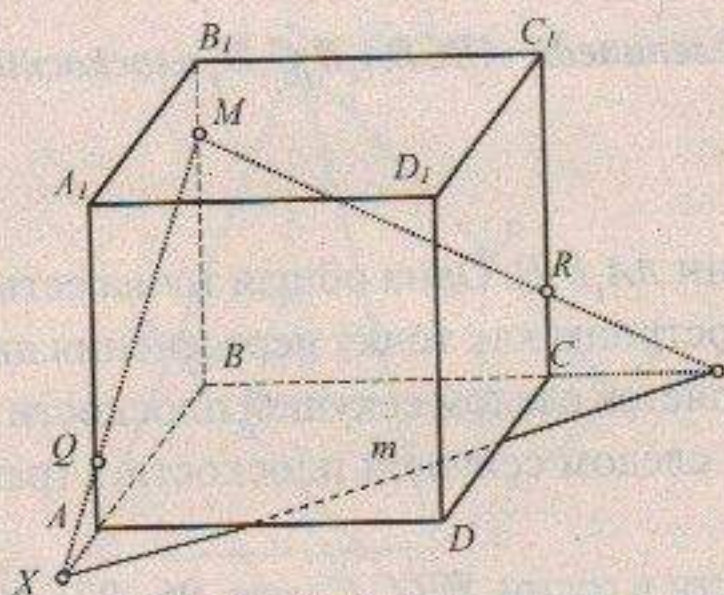


Рис. 97

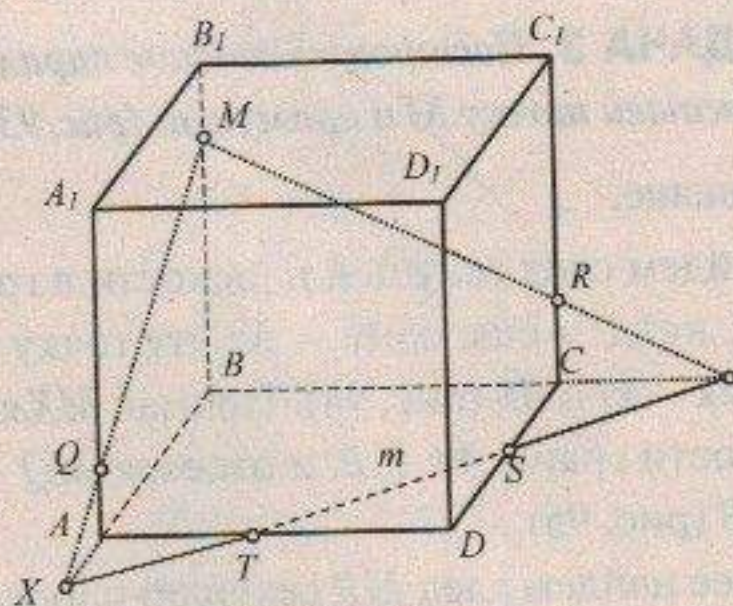


Рис. 98, а

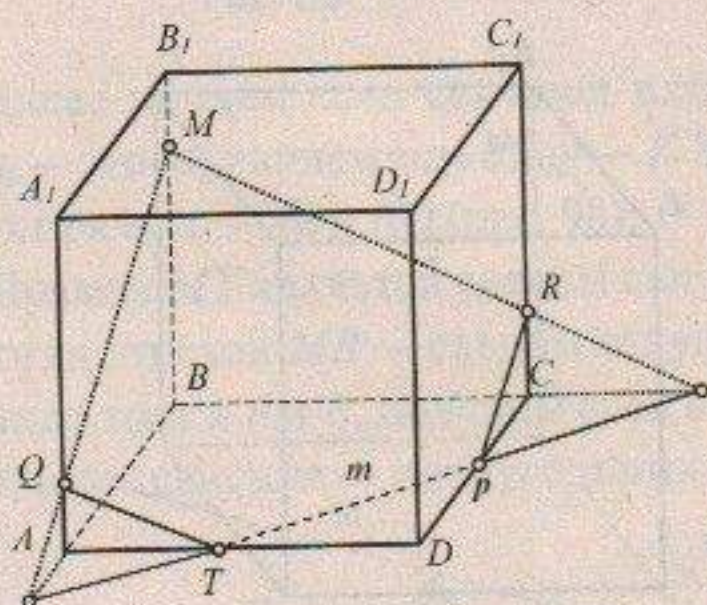


Рис. 98, б

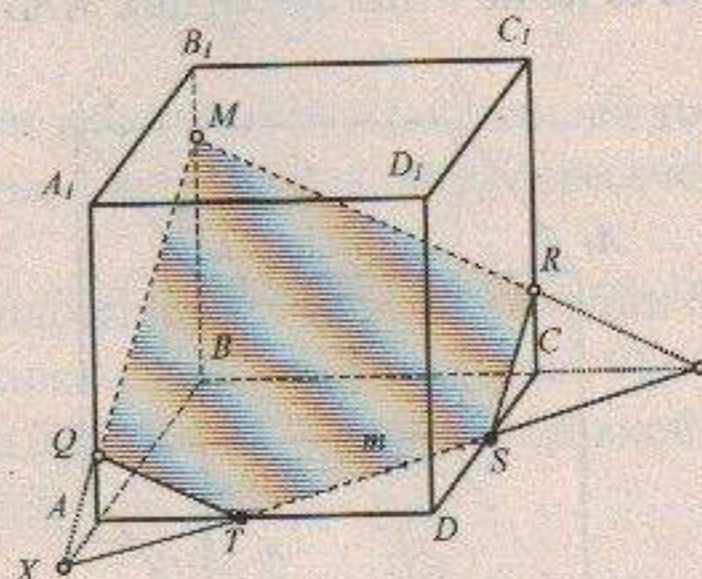


Рис. 98, в

ЗАДАЧА 4. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, содержащей точку M и прямую t (рис. 99).

Решение.

Найдем след секущей плоскости в грани SDC . Одна общая точка есть — это M , найдем еще одну точку — X . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — t и CD (рис. 100). Прямая MX является следом секущей плоскости на плоскости грани SDC , а отрезок MQ — следом секущей плоскости в грани SDC (рис. 101). Далее найдем след секущей плоскости в грани SBC . Одна общая точка есть — это M , найдем еще одну — Y . Эту точку построим как точку пересечения двух прямых — t и BC (рис. 102).

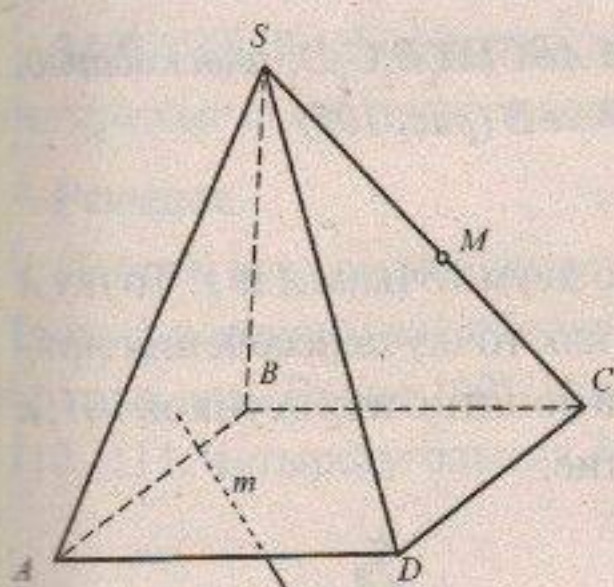


Рис. 99

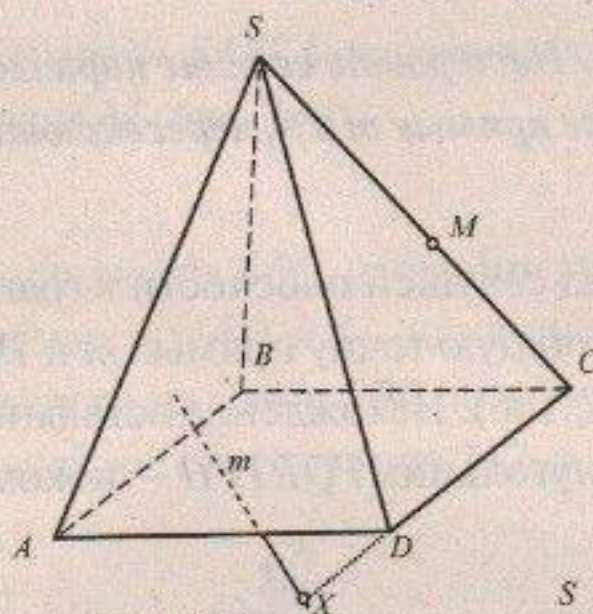


Рис. 100

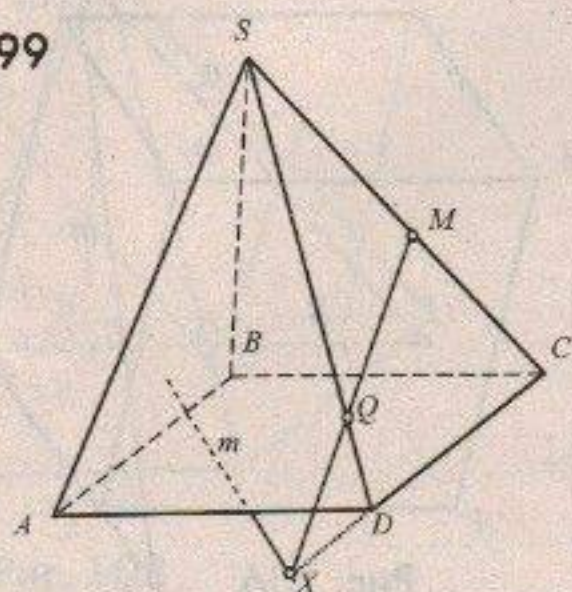


Рис. 101

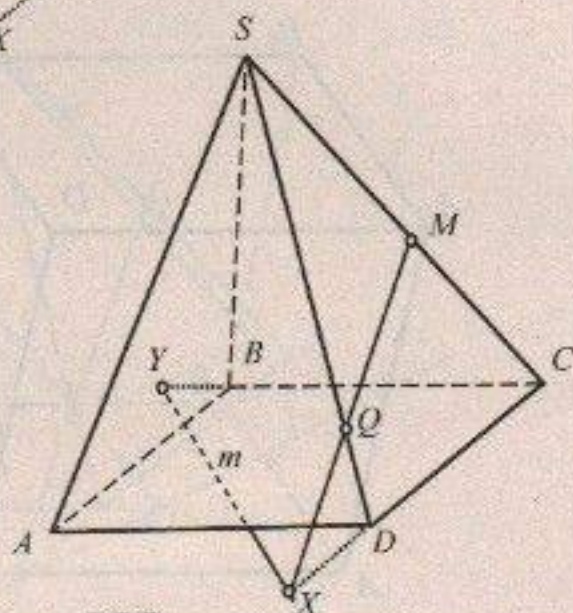


Рис. 102

Прямая MY является следом секущей плоскости на плоскости грани SBC , а отрезок MR — следом секущей плоскости в грани SBC (рис. 103). Искомое сечение — пятиугольник $MQTSR$ (рис. 104).

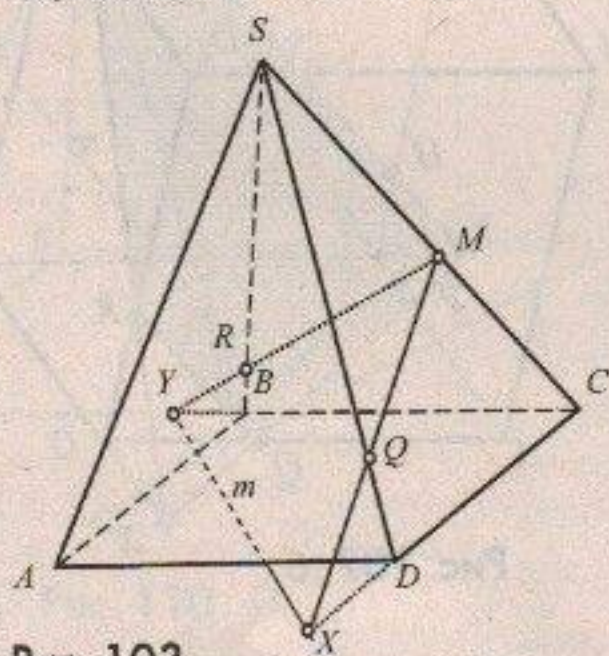


Рис. 103

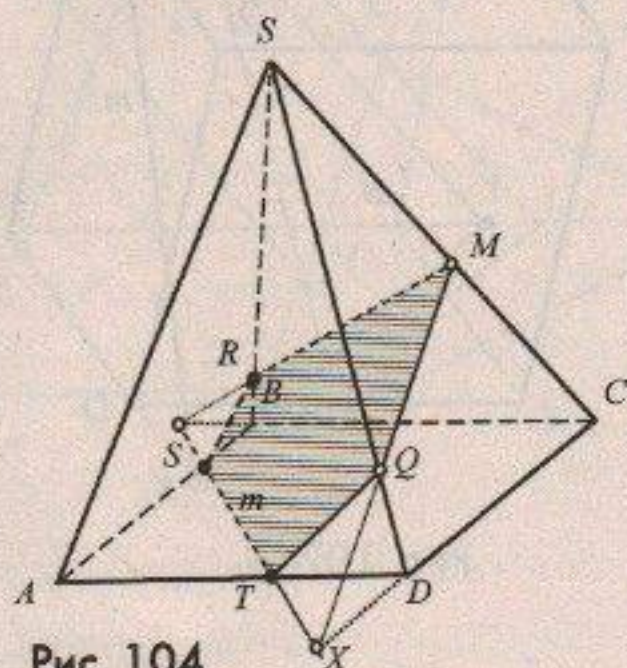


Рис. 104

ЗАДАЧА 5. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, содержащей две прямые m и n , пересекающиеся в точке S (рис. 105).

Решение.

Найдем след секущей плоскости в грани ABC по двум точкам X и Y . Точку X построим как общую точку прямых m и DC , а Y — как точку пересечения прямых n и AB (рис. 106). Нахождение остальных следов понятно из рисунков 107, а и 107, б. Шестиугольник $PQRTFH$ — искомое сечение.

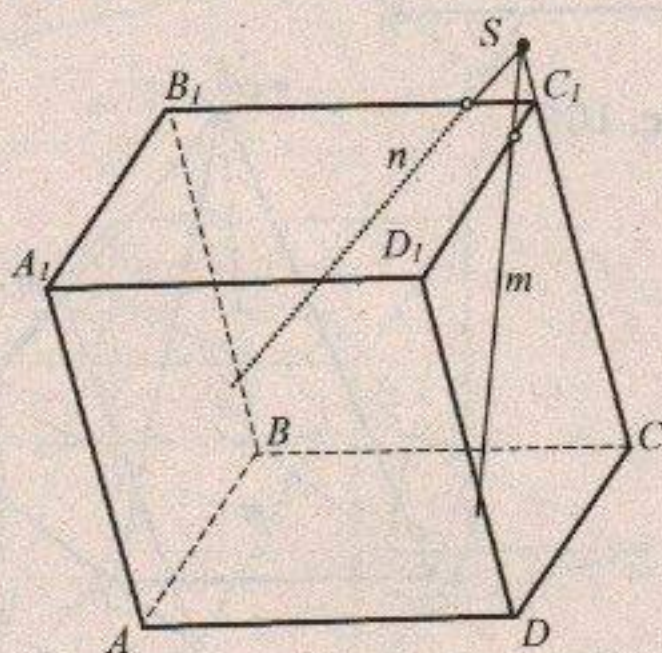


Рис. 105

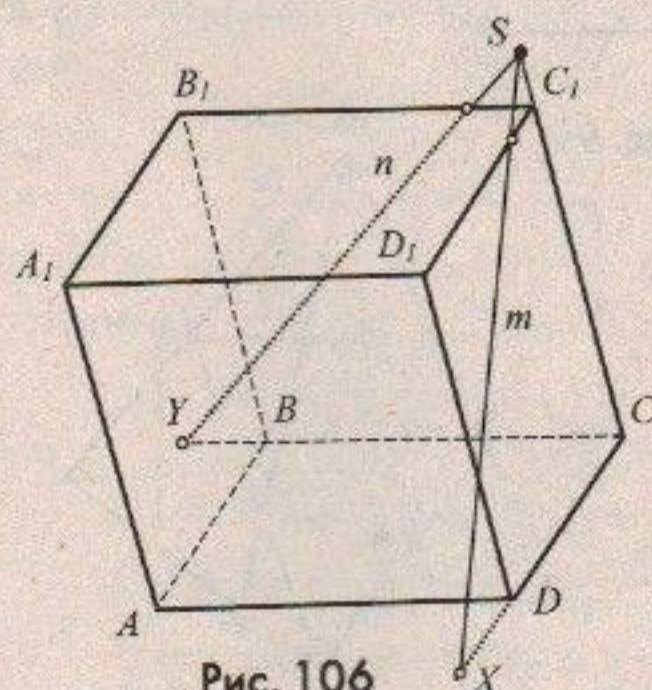


Рис. 106

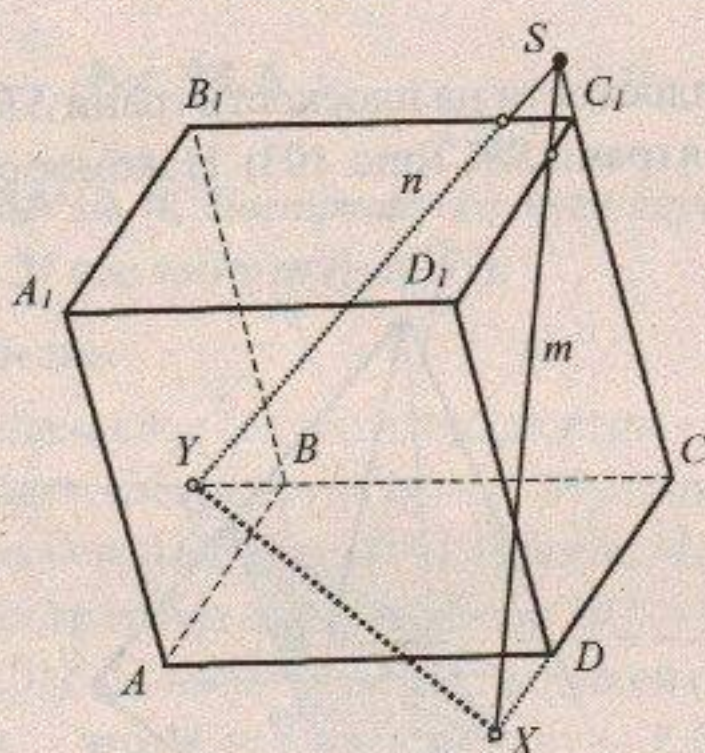


Рис. 107, а

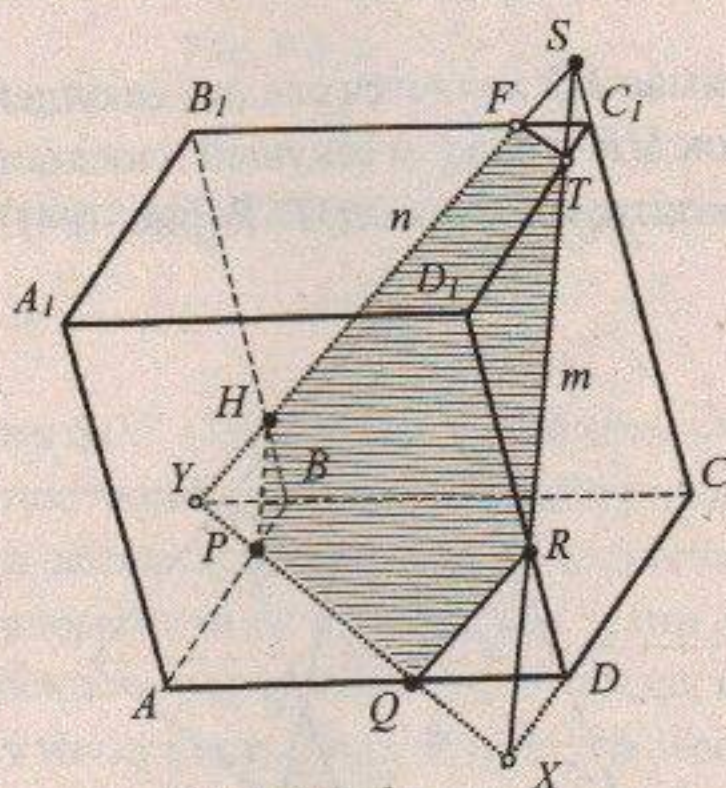


Рис. 107, б

ЗАДАЧА 5. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, содержащей две прямые m и n , пересекающиеся в точке M (рис. 108).

Решение.

Найдем след секущей плоскости в плоскости ABC , построив две точки X и Y . Точку X построим как общую точку прямых m и AD , а Y — как точку пересечения прямых n и CD (рис. 109). Нахождение следа на грани SBC понятно из рисунков 110–111. Четырехугольник $MPQR$ — искомое сечение (рис. 112, а, б).

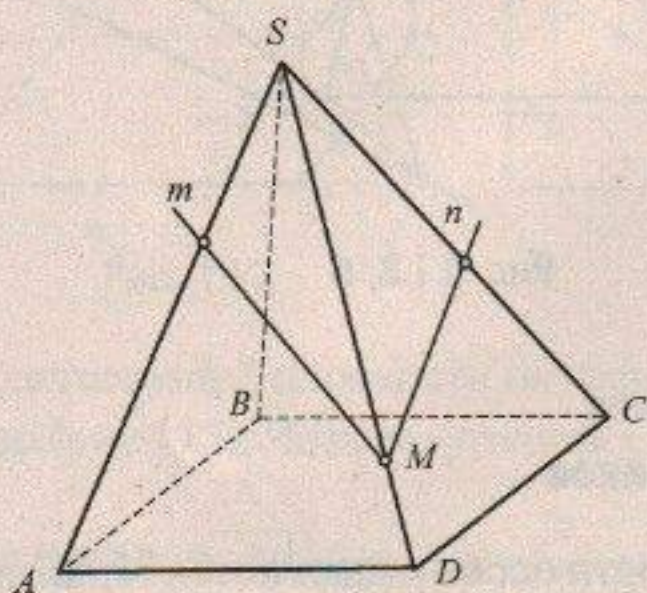


Рис. 108

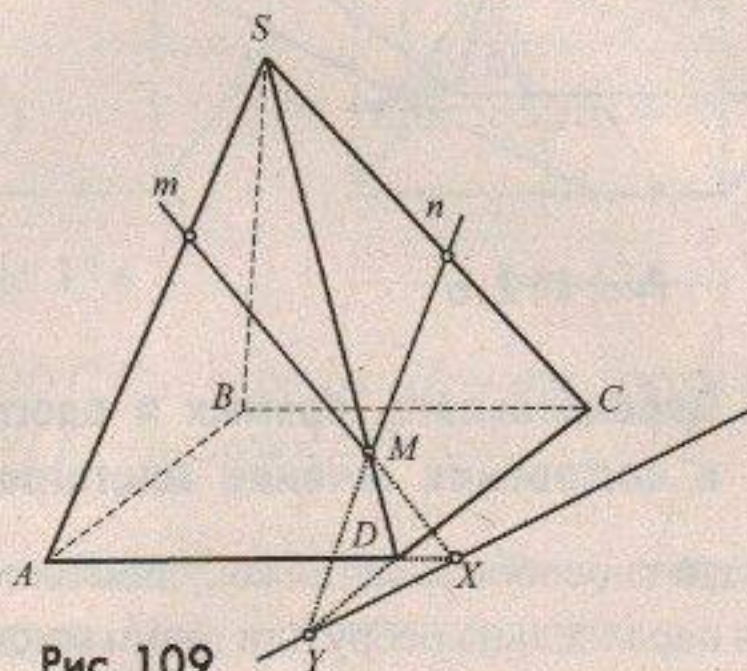


Рис. 109

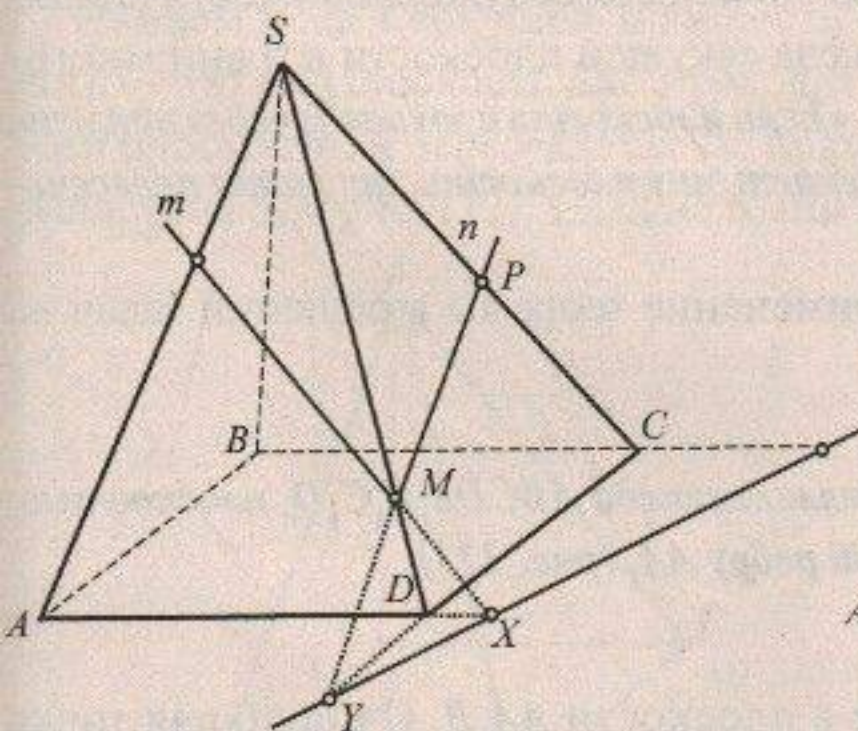


Рис. 110

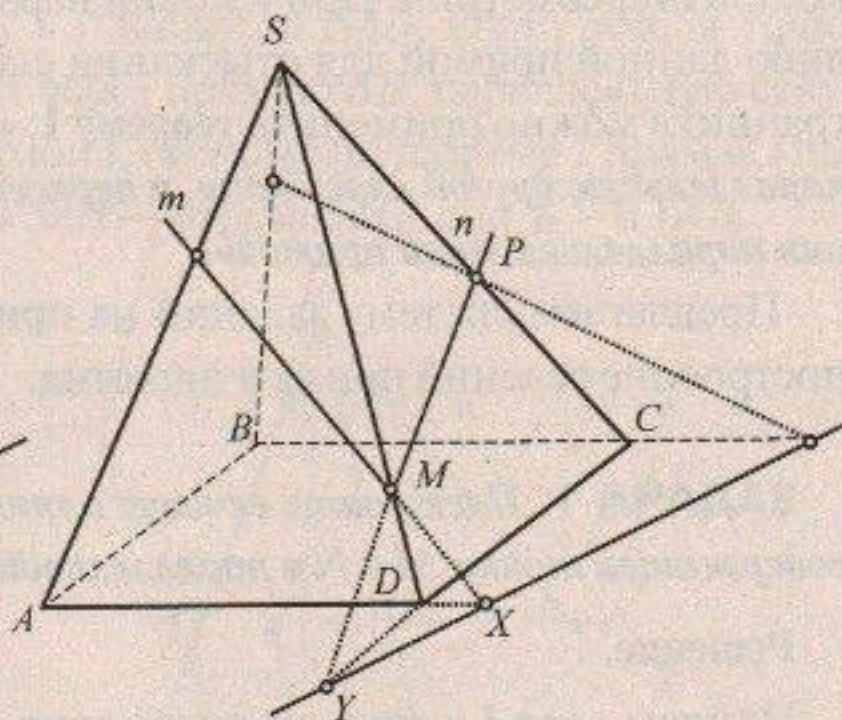


Рис. 111

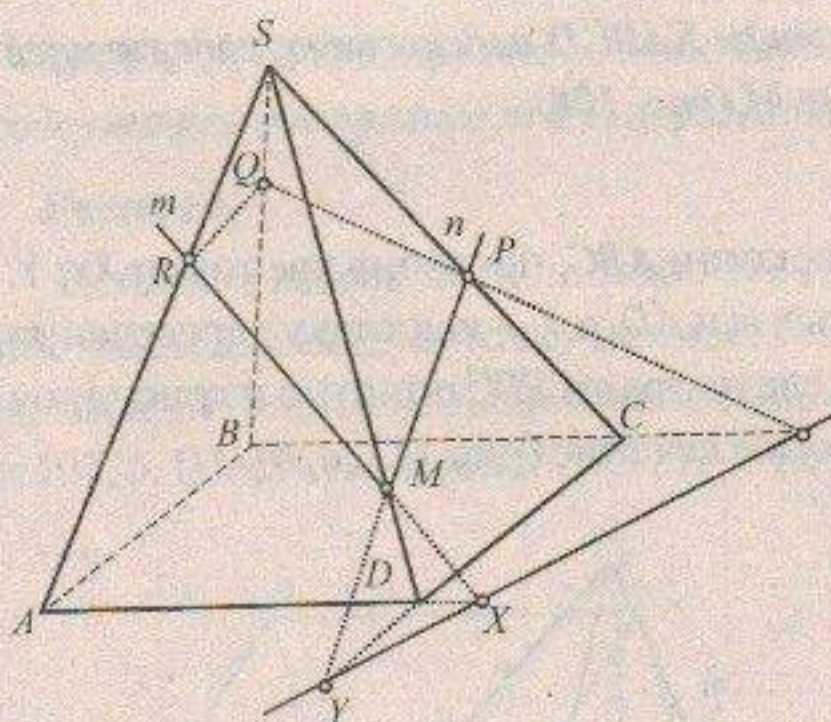


Рис. 112, а

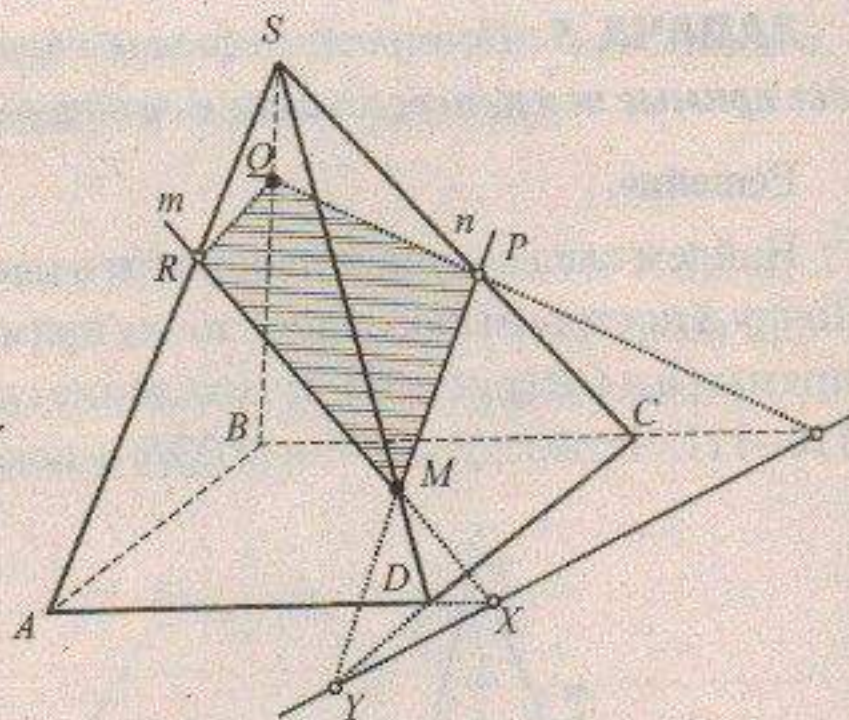


Рис. 112, б

2.3.3. Параллельность прямых и плоскостей в построении сечений многогранников

Среди способов задания секущей плоскости особо выделяются те, когда секущая параллельна ребру или грани многогранника. Построение сечений в таких случаях основано на применении свойств параллельности прямых и плоскостей стереометрии. При условии параллельности секущей плоскости какой-либо данной прямой для отыскания следа секущей плоскости в грани многогранника можно применить **теорему 1**: «Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна этой прямой».

Предлагаем систему заданий на применение теоремы в решении задач на построение сечений призм и пирамид.

ЗАДАЧА 1. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, содержащей точки M и N и параллельной ребру AA_1 (рис. 113).

Решение.

Найдем след l секущей плоскости в плоскости $AA_1 B$. Одна общая точка есть — это M . Плоскость $AA_1 B$ проходит через прямую AA_1 , параллельную секущей плоскости и пересекает ее по прямой l , поэтому по теореме 1 прямая l

параллельна прямой AA_1 (рис. 114). След на грани AA_1B_1B — отрезок MK , где $K = l \cap AB$.

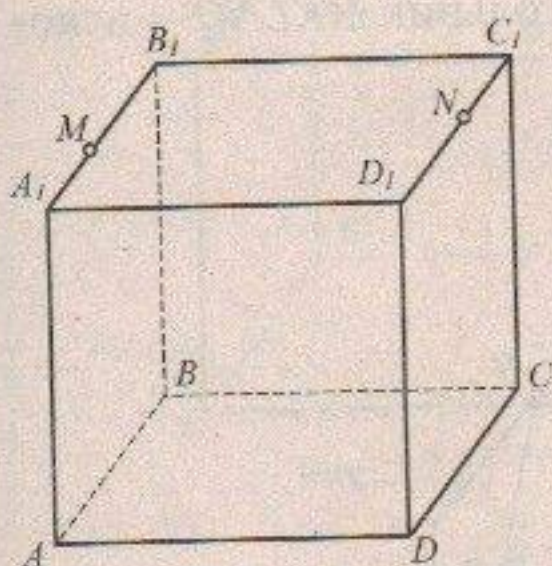


Рис. 113

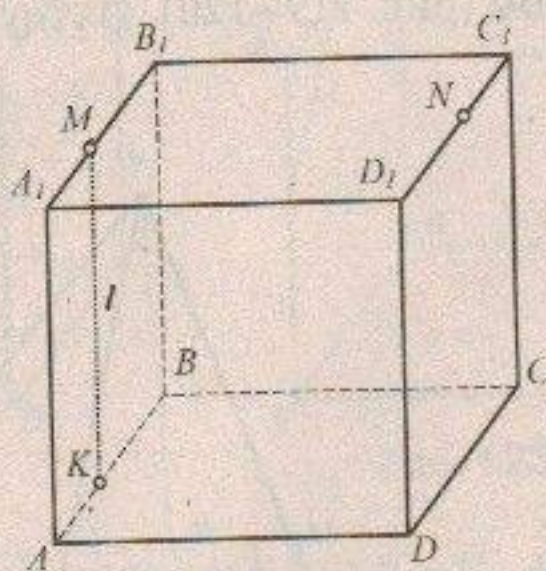


Рис. 114

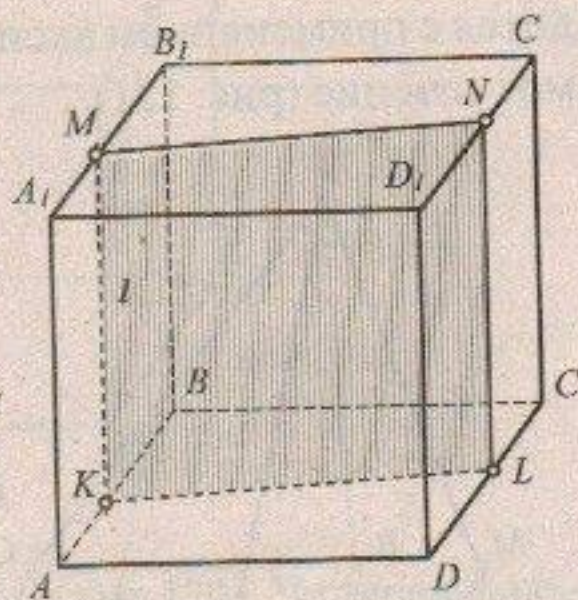


Рис. 115

След секущей плоскости на грани DD_1C_1C — отрезок NL — находится аналогично (рис. 115). Четырехугольник $MNLK$ — искомое сечение.

ЗАДАЧА 2. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, содержащей точки M и N и параллельной ребру SD (рис. 116).

Решение.

Найдем след l секущей плоскости в плоскости SAD . Одна общая точка есть — это M . Плоскость SAD проходит через прямую SD , параллельную секущей плоскости, и пересекает ее по прямой l , поэтому по теореме 1 прямая l параллельна SD (рис. 117). След на грани SAD — отрезок MK , где $K = l \cap AD$.

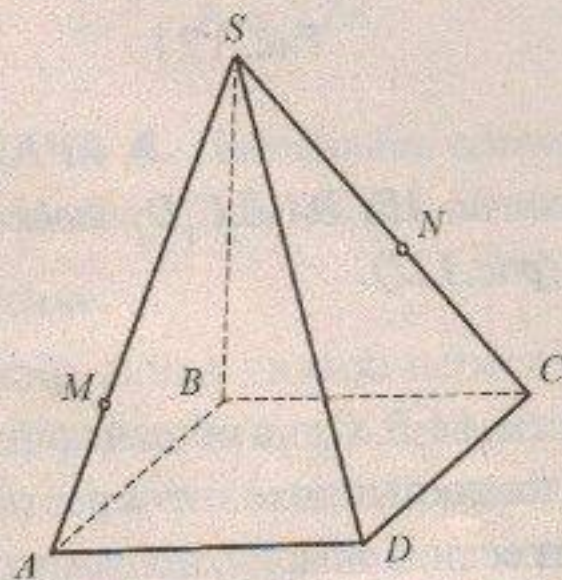


Рис. 116

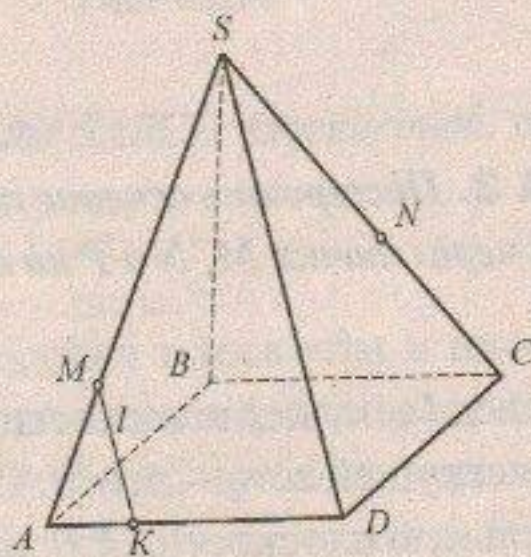


Рис. 117

След секущей плоскости на грани SCD — отрезок NL — находится аналогично (рис. 118). След секущей плоскости на грани SAB — отрезок MQ — находится с применением аксиом (рис. 119–120). Пятиугольник $MKLNQ$ — искомое сечение (рис. 121).

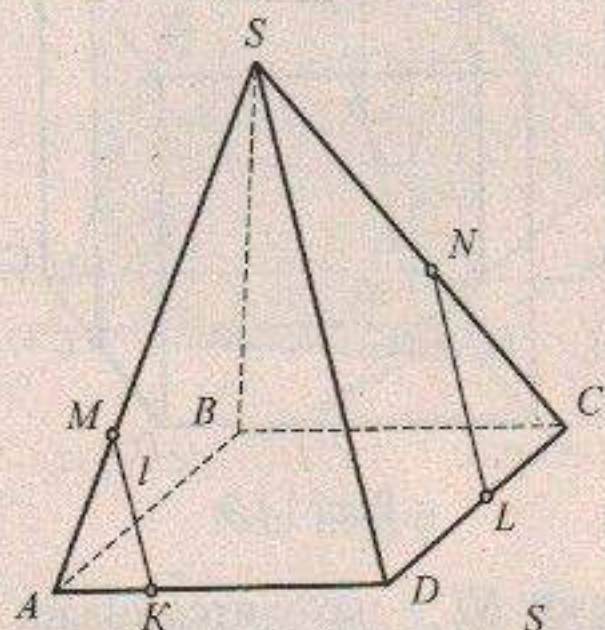


Рис. 118

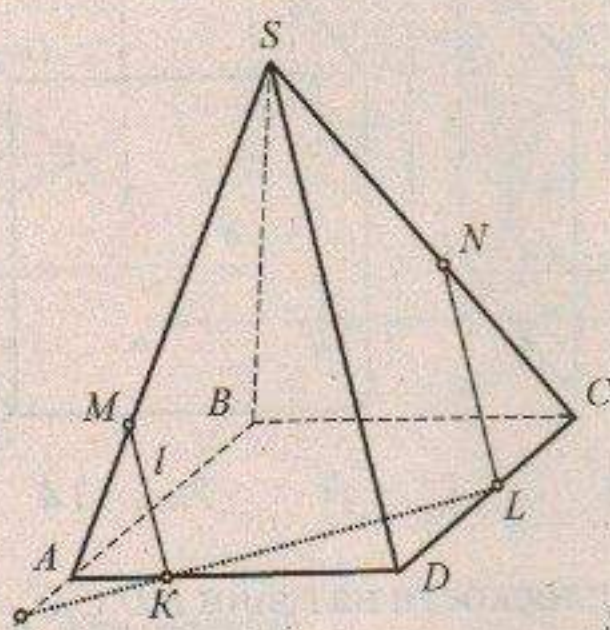


Рис. 119

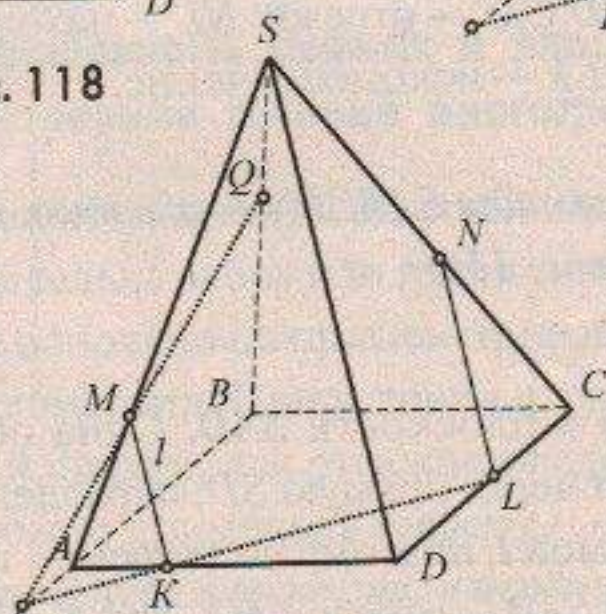


Рис. 120

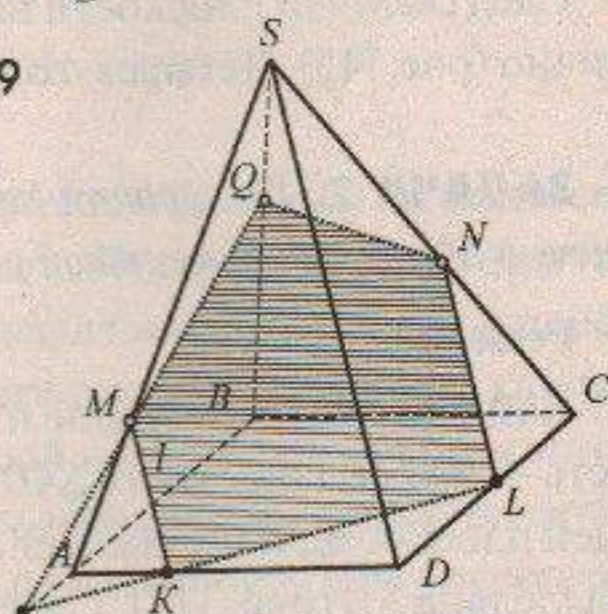


Рис. 121

ЗАДАЧА 3. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N и P на его ребрах (рис. 122).

Решение.

Найдем след l секущей плоскости в плоскости $AA_1 B$. Одна общая точка этой плоскости и секущей есть — это M . Секущая плоскость проходит через прямую NP , параллельную плоскости $AA_1 B$, и пересекает ее по прямой l , поэтому по теореме 1 прямая l параллельна MP (рис. 123).

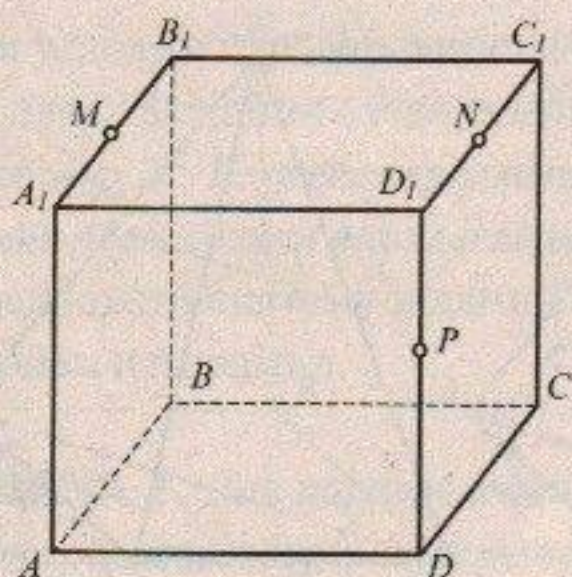


Рис. 122

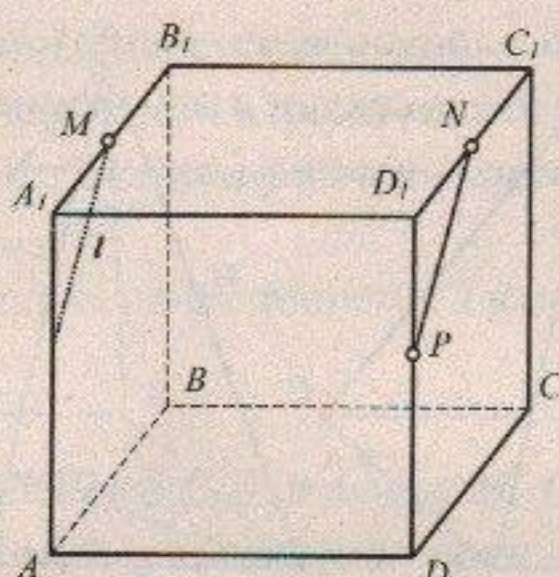


Рис. 123

След на грани AA_1B_1B — отрезок MK , где $K = l \cap AA_1$ (рис. 124). Четырехугольник $MKPN$ — искомое сечение (рис. 125).

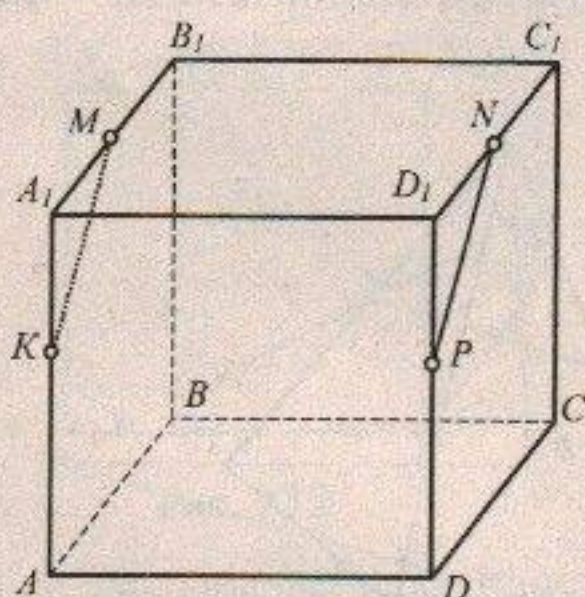


Рис. 124

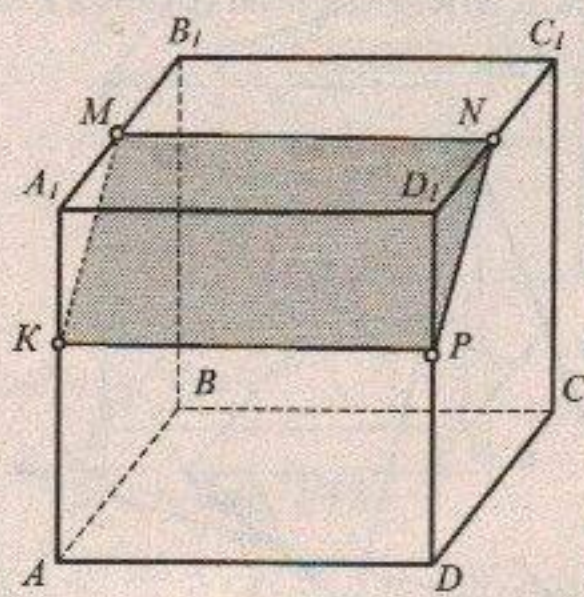


Рис. 125

ЗАДАЧА 4. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, содержащей точки M , N и P (рис. 126).

Решение.

Можно найти линию пересечения l секущей плоскости и плоскости SAC (рис. 127). Заметим, что прямые PN и AC параллельны, поэтому секущая плоскость будет параллельна прямой AC . Плоскость SAC проходит через прямую AC , параллельную секущей плоскости, и пересекает ее по прямой l , поэтому по теореме 1 прямая l параллельна AC (рис. 128).

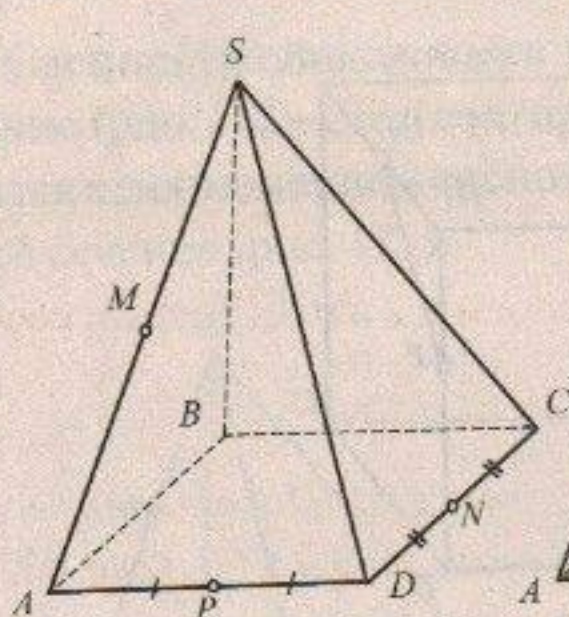


Рис. 126

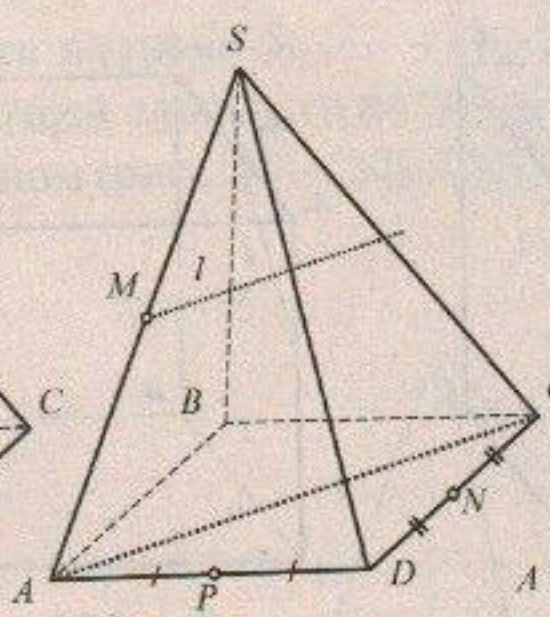


Рис. 127

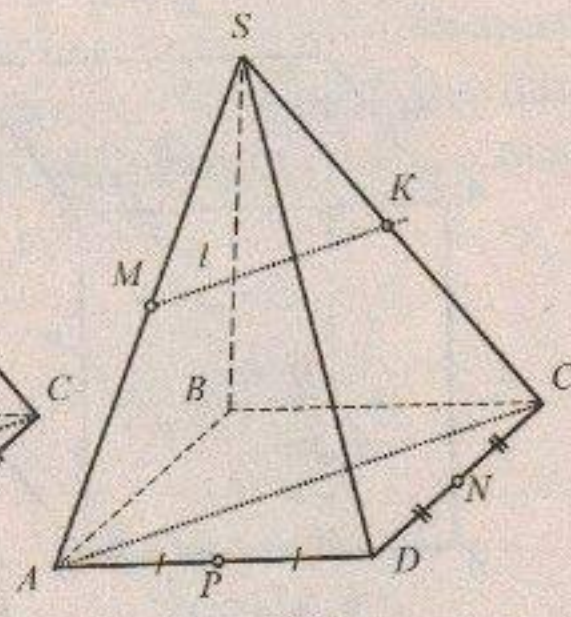


Рис. 128

Прямая l проходит через данную точку M параллельно прямой AC . Построим точку $K = l \cap SC$. След секущей плоскости на грани SBC — отрезок KR — находится с применением аксиом (рис. 129–130). Пятиугольник $MRKNP$ — искомое сечение (рис. 131, а, б).

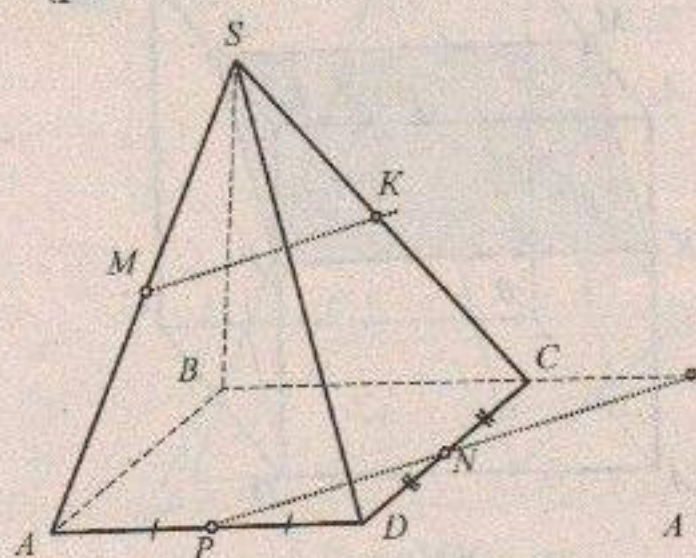


Рис. 129

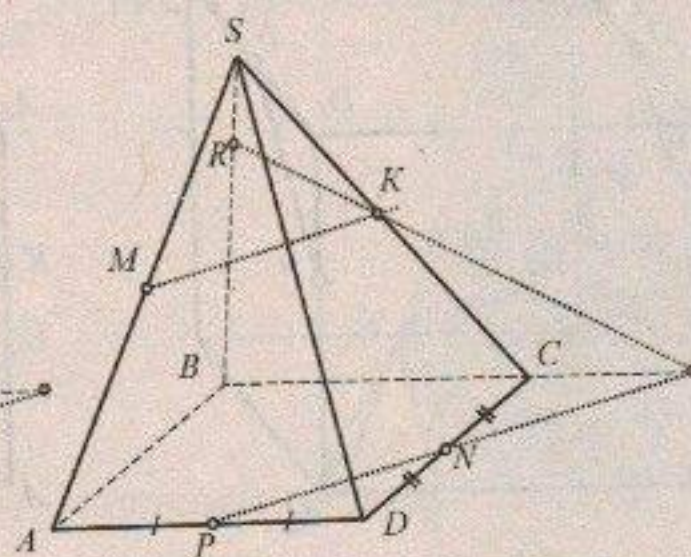


Рис. 130

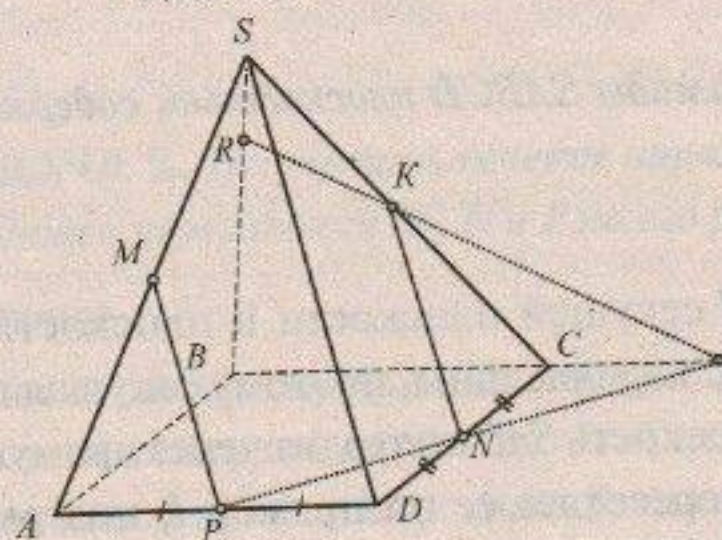


Рис. 131, а

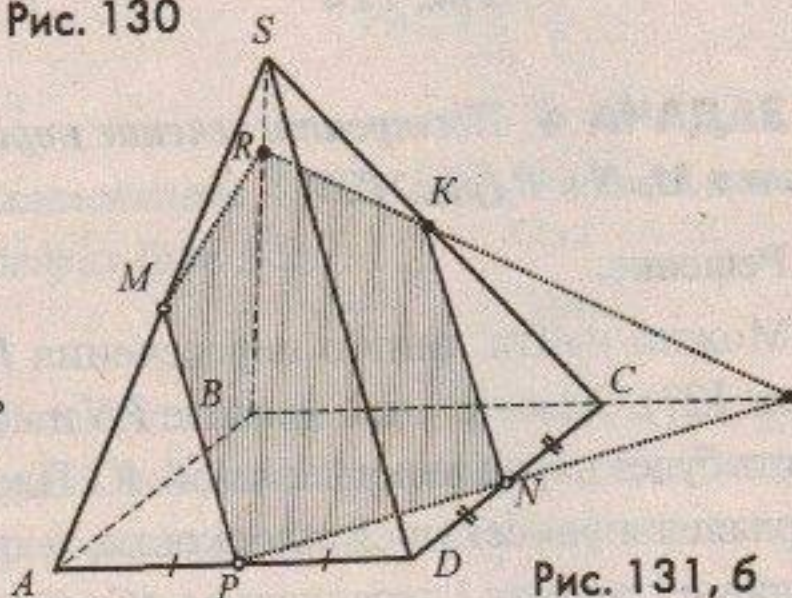


Рис. 131, б

При условии параллельности секущей плоскости какой-либо данной плоскости для отыскания следа секущей плоскости в грани многогранника применим теорему 2: «Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны».

Предложим систему заданий на применение теоремы 2 в построении сечений призм и пирамид.

ЗАДАЧА 1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точка M . Построить сечение плоскостью, содержащей точку M и параллельной плоскости $AA_1 C_1 C$ (рис. 132).

Решение.

Пусть l — след секущей плоскости в плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$.

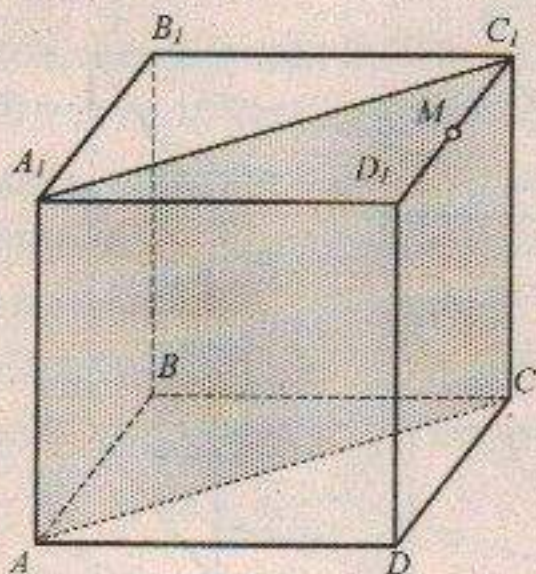


Рис. 132

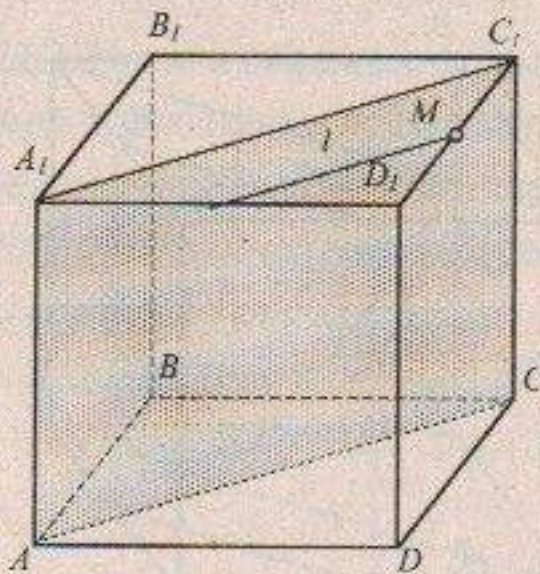


Рис. 133

Имеем две параллельные плоскости $AA_1 C_1 C$ и секущую плоскость, которые пересекаются третьей плоскостью $A_1 B_1 C_1 D_1$ по прямой l . По теореме 2 линии пересечения — $A_1 C_1$ и l — параллельны. Прямую l проведем через точку M параллельно прямой $A_1 C_1$ (рис. 133). След на грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ — отрезок MN , где $N = l \cap A_1 D_1$ (рис. 134).

Найдем след p секущей в плоскости $AA_1 D_1 D$. Имеем две параллельные плоскости $AA_1 C_1 C$ и секущую плоскость, которые пересекаются третьей плоскостью $AA_1 D_1 D$ по прямой p . По теореме 2 линии пересечения — AA_1 и p — параллельны. Прямую p проведем через точку N параллельно AA_1 (рис. 135). След на грани $AA_1 D_1 D$ — отрезок NP , где $P = p \cap AD$ (рис. 135). Следы на гранях $ABCD$ и $DD_1 C_1 C$ находятся аналогично. Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение (рис. 136, а, б).

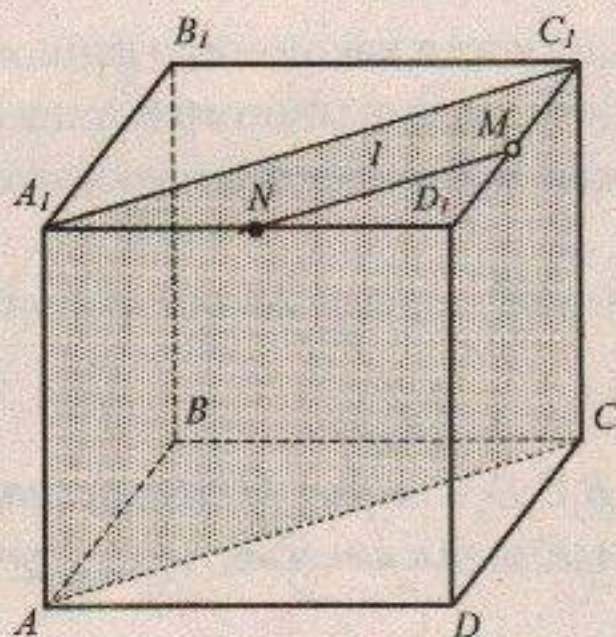


Рис. 134

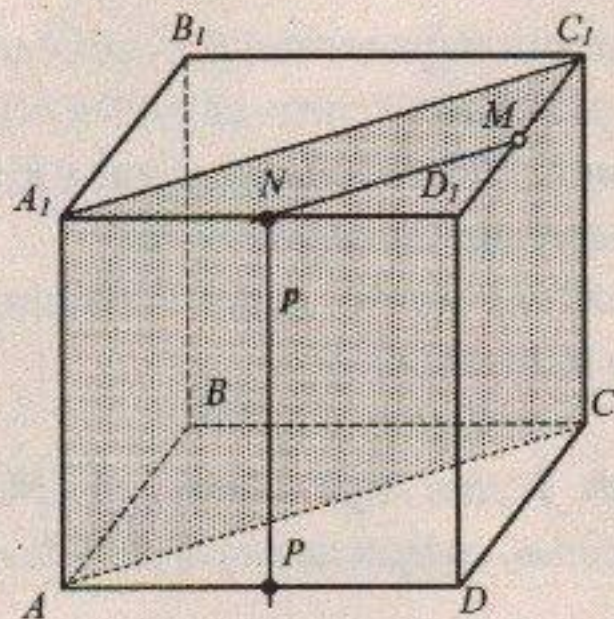


Рис. 135

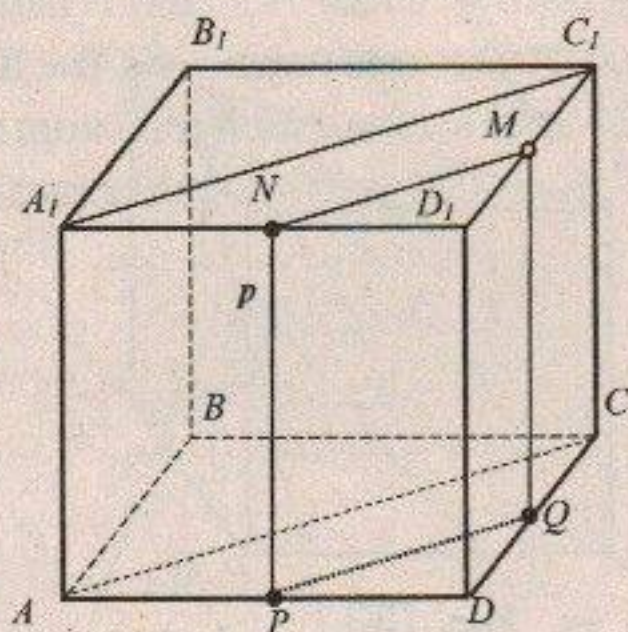


Рис. 136, а

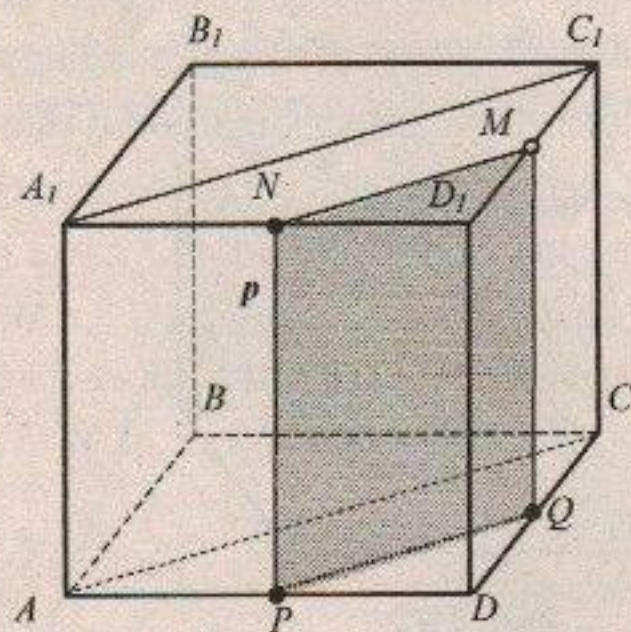


Рис. 136, б

ЗАДАЧА 2. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, содержащей точку M и параллельной плоскости $SABCD$ (рис. 137).

Решение.

Найдем след l секущей плоскости в плоскости ABC . Имеем две параллельные плоскости: плоскость SCD и секущую плоскость, которые пересекаются третьей плоскостью ABC по прямой l . По теореме 2 линии пересечения — DC и l — параллельны. Прямую l проведем через точку M параллельно DC (рис. 138, а).

След секущей плоскости на грани $ABCD$ — отрезок NP , где $N = l \cap AD$ и $P = l \cap BC$ (рис. 138, б).

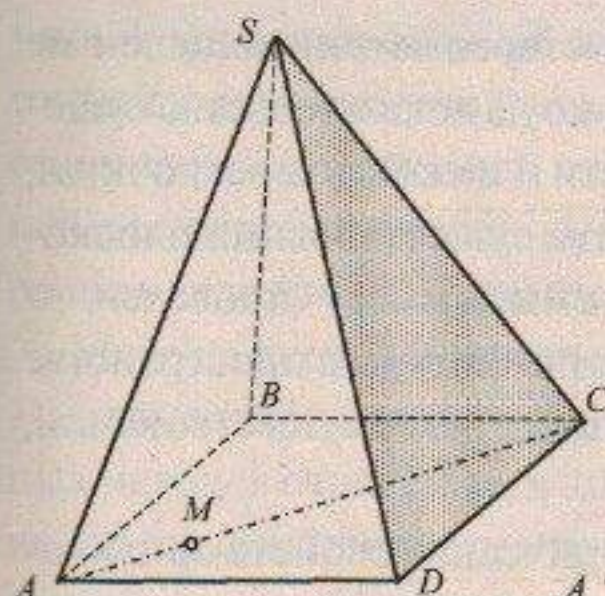


Рис. 137

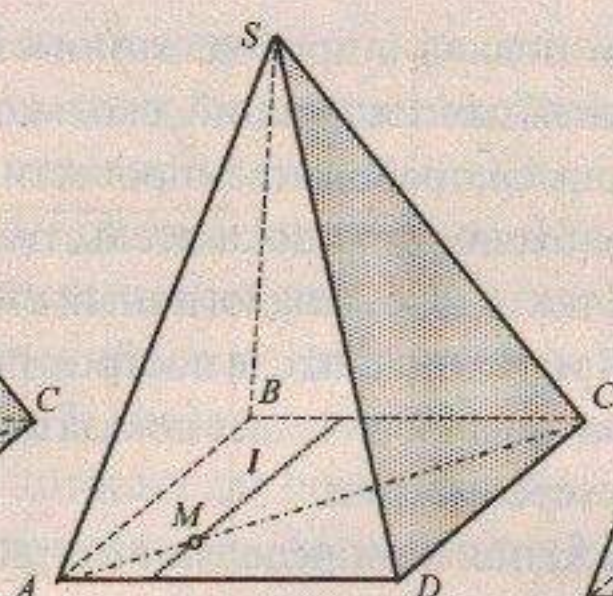


Рис. 138, а

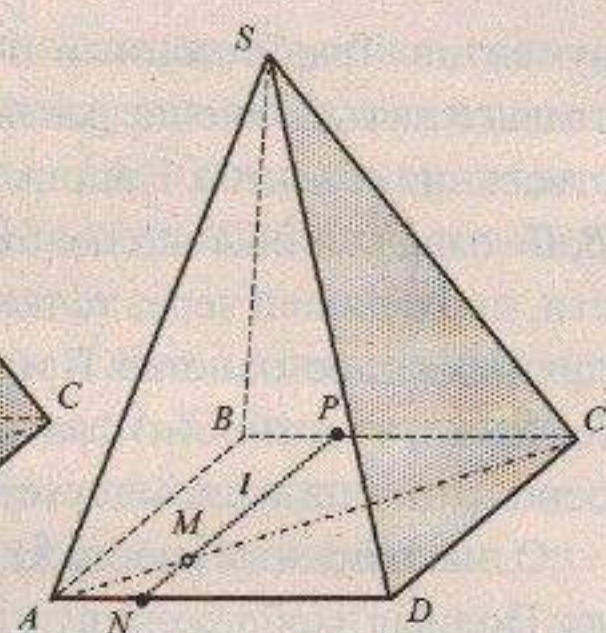


Рис. 138, б

Найдем «след» p секущей в плоскости SAD . Имеем две параллельные плоскости: SCD и секущую плоскость, которые пересекаются третьей плоскостью SAD по прямой p . По теореме 2 линии пересечения — SD и l — параллельны. Прямую p проведем в плоскости SAD через точку N параллельно SD (рис. 139).

След на грани SAD — отрезок NQ , где $Q = p \cap SA$ (рис. 139).

След секущей в плоскости SBC находится аналогично: прямая PR параллельна SC (рис. 140). Четырехугольник $NQRP$ — искомое сечение (рис. 141).

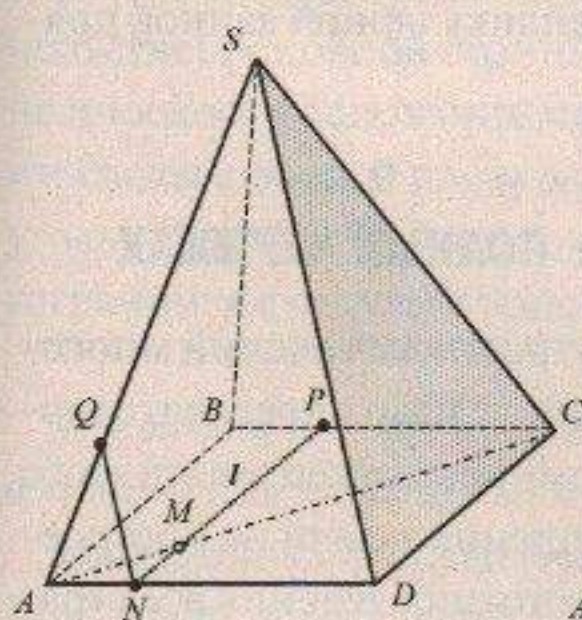


Рис. 139

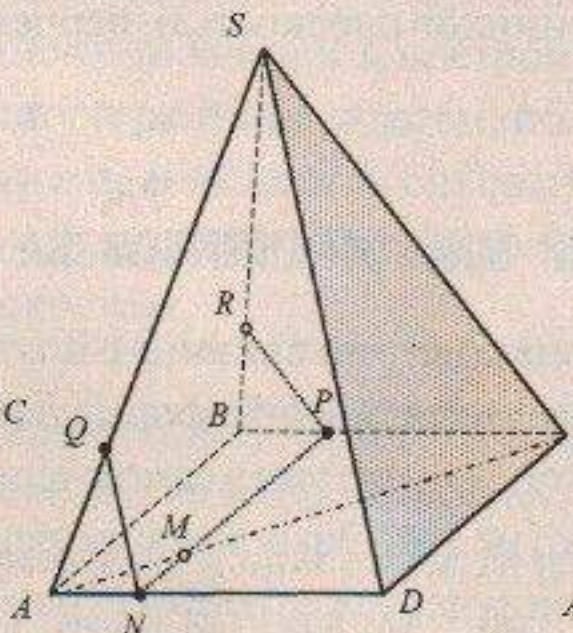


Рис. 140

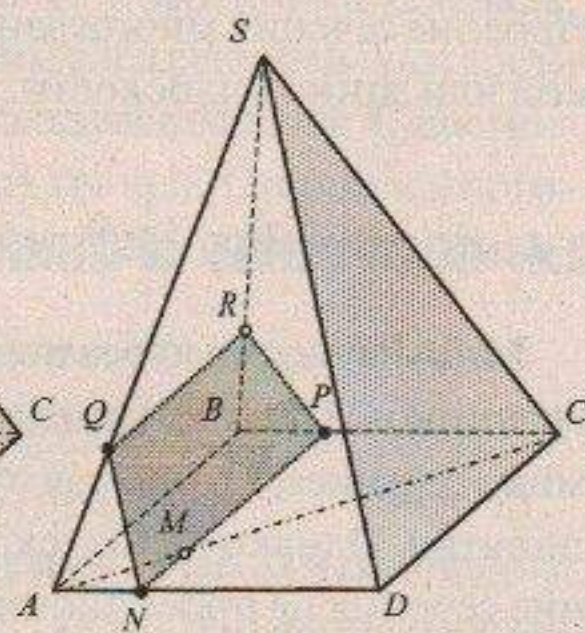


Рис. 141

Приведенные в главе примеры решения задач на построение сечений многогранников убедительно показали, что построения в пространстве могут быть выполнены на проекционном чертеже при помощи обычных чертежных инст-

рументов. Традиционный подход в преподавании стереометрии нацелен не столько на выполнение реальных построений, сколько на доказательство существования объектов. Например, требование «провести плоскость через точки A , B , C » означает обычно необходимость доказательства существования плоскости, проходящей через точки A , B , C . Аналогичный смысл имеет «проведение» прямых в пространстве. При таком подходе построение фигуры в пространстве (сечения, в частности) фактически означает доказательство ее существования, основанное на аксиомах стереометрии.

Однако полные изображения не определяют метрических свойств оригинала. Полные изображения не дают возможности решать метрические задачи, такие как нахождение расстояний между точками оригинала, вычисление мер углов фигуры-оригинала, определение размеров элементов оригинала. Для решения метрических задач проекционный чертеж должен обладать «метрической полнотой». Это означает, что должна быть известна форма оригинала, т.е. оригинал может быть восстановлен по чертежу с точностью до подобия. Например, если на проекционном чертеже построено изображение куба, то форма оригинала известна. Обладает метрической полнотой, например, изображение правильного тетраэдра. На метрически определенных чертежах становится возможным эффективное решение метрических задач, в том числе, например, построение сечений многогранников плоскостью, перпендикулярной данной прямой или данной плоскости.

2.4. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ НА ПОЛНЫХ ЧЕРТЕЖАХ

Многие задачи курса стереометрии связаны с построением сечений многогранников. При этом иногда считается, что формально не надо определять термин «сечение», мотивируя это тем, что уже в самом термине заложен смысл этого понятия. Однако это далеко не так. Эффективное решение задачи на построение сечения на проекционном чертеже требует строгого определения всех «рабочих» понятий, таких как «секущая плоскость», «сечение». Дадим определения основным используемым понятиям. «Секущей плоскостью» назовем такую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. «Сечение» определим как фигуру, которая образуется при пересечении многогранника секущей плоскостью, или как фигуру, состоящую из общих точек

многогранника и секущей плоскости. Из определения следует, что сечение многогранника — это многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения ребер с секущей плоскостью, а сторонами — линии пересечения граней с секущей плоскостью, при этом число сторон многоугольника — сечения равно числу граней, пересекаемых секущей плоскостью.

Методы построения сечений многогранников мы условно разделим на два: 1) «элементарные» методы; 2) «неэлементарные» методы. К числу элементарных методов отнесем те, в которых для построения сечений достаточно применения аксиом или теорем элементарной геометрии (2.3). К числу неэлементарных методов причислим те, где для построения сечений необходимы знания основ начертательной геометрии и, в частности, приемы решения основных позиционных задач. Среди «неэлементарных» методов построения сечений многогранников выделим два, которые будем далее рассматривать: метод «следа секущей плоскости» и метод «внутреннего проектирования».

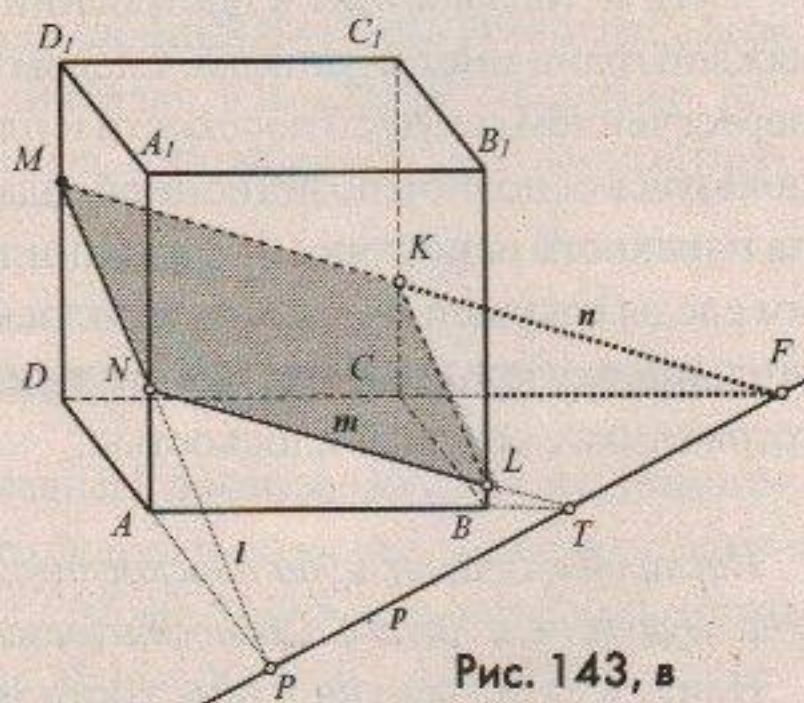
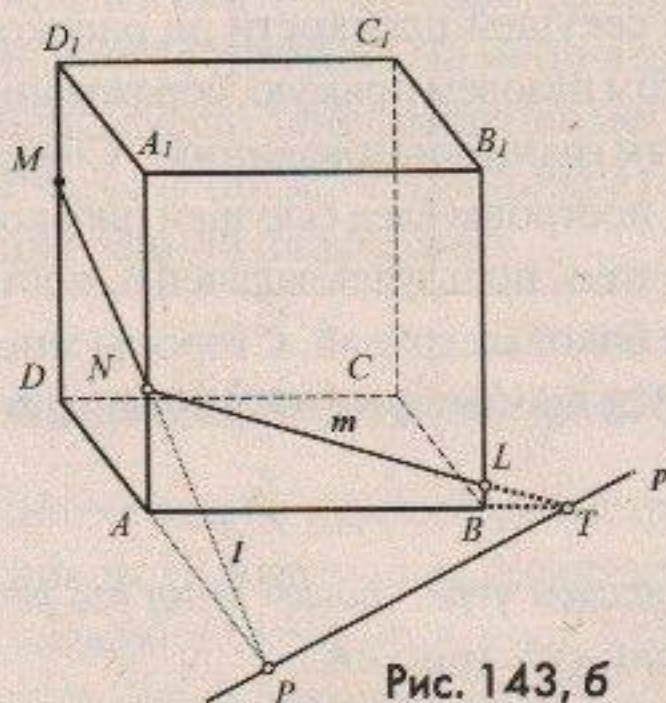
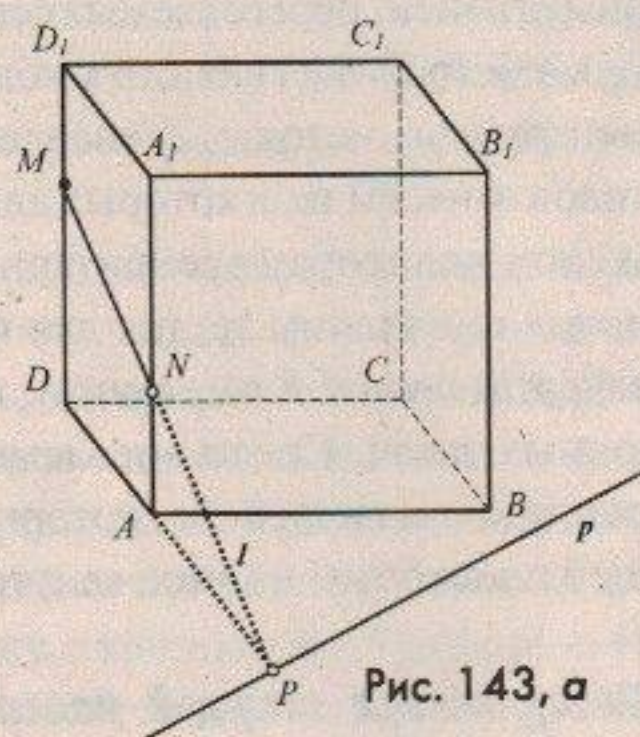
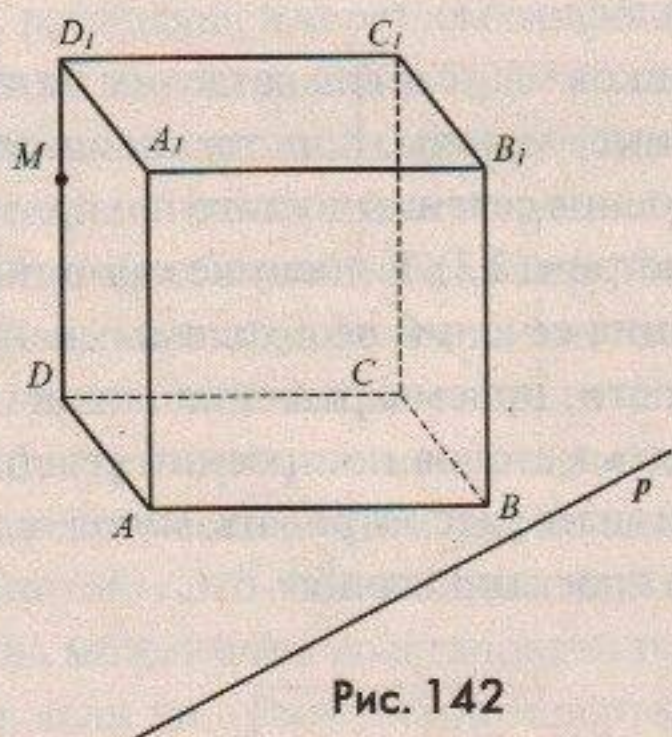
2.4.1. Метод «следа секущей плоскости»

Суть метода состоит в построении следа секущей плоскости на плоскости каждой грани многогранника. Следом при этом назовем прямую, образованную пересечением секущей плоскости и плоскости грани многогранника. Сначала, пользуясь основной позиционной задачей 3, построим след секущей плоскости на плоскости основания многогранника, а затем, пользуясь задачей 4, построим следы секущей плоскости на плоскостях боковых граней. Стороны многоугольника сечения при этом будут являться отрезками пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точку M на его ребре, и прямую p , лежащую в плоскости нижней грани куба (рис. 142).

Найдем след l секущей плоскости на плоскости грани AA_1D_1D и обозначим N — точку пересечения прямой с ребром AA_1 (рис. 143, а). Получим отрезок $[MN]$ — след секущей плоскости на грани AA_1D_1D . Далее построим след m секущей плоскости на плоскости грани AA_1B_1B и обозначим L — точку пересечения прямой с ребром BB_1 (рис. 143, б). Получим отрезок $[LN]$ — след секущей плоскости на грани AA_1B_1B . Следующим шагом найдем след n секущей

плоскости на плоскости грани CC_1D_1D и обозначим K — точку пересечения прямой с ребром CC_1 (рис. 143, в). Получим отрезок $[MK]$ — след секущей плоскости на грани CC_1D_1D . Четырехугольник $MNKL$ — сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и прямую p .



Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через три точки M , N и P на ее боковых ребрах (рис. 144).

Найдем след p секущей плоскости на основании $ABCD$ призмы (рис. 145, а) по двум точкам X и Y с использованием основной задачи № 3. Далее ищем след

секущей плоскости на плоскости грани BB_1C_1C и обозначаем Q — точку пересечения прямой с ребром CC_1 (рис. 145, б). Получим отрезок $[NQ]$ — след секущей плоскости на грани BB_1C_1C . Имеем сечение $MNQP$ призмы плоскостью, проходящей через три точки M, N, P на ее ребрах (рис. 145, в).

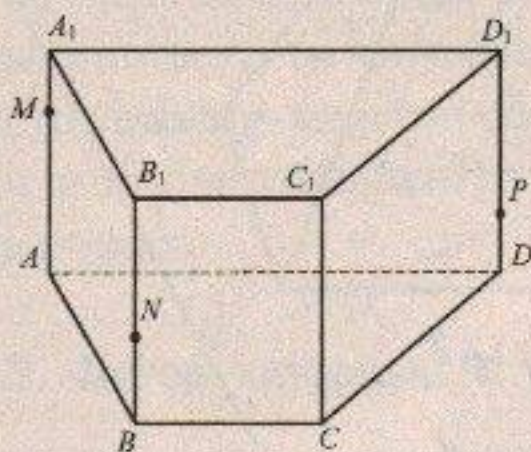


Рис. 144

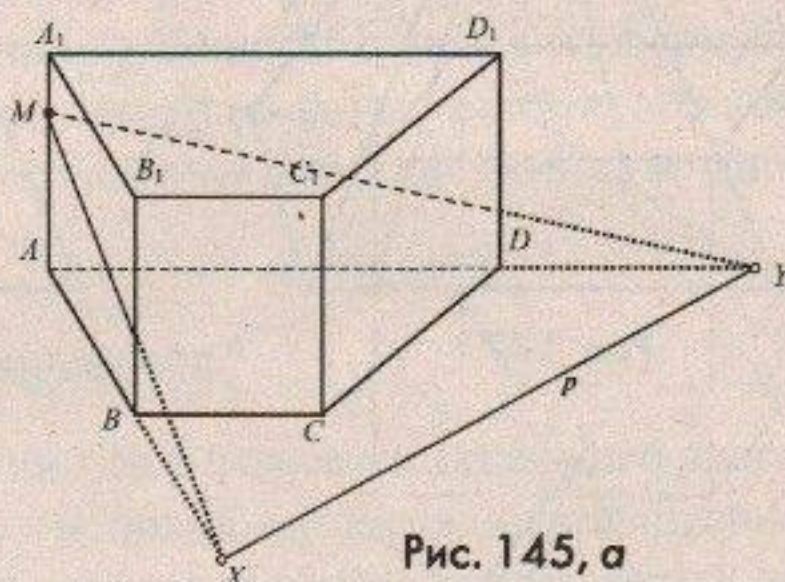


Рис. 145, а

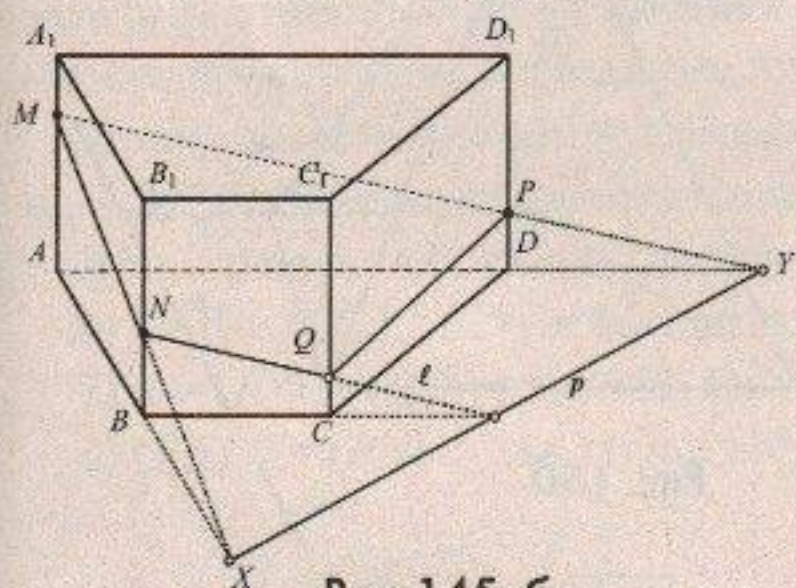


Рис. 145, б

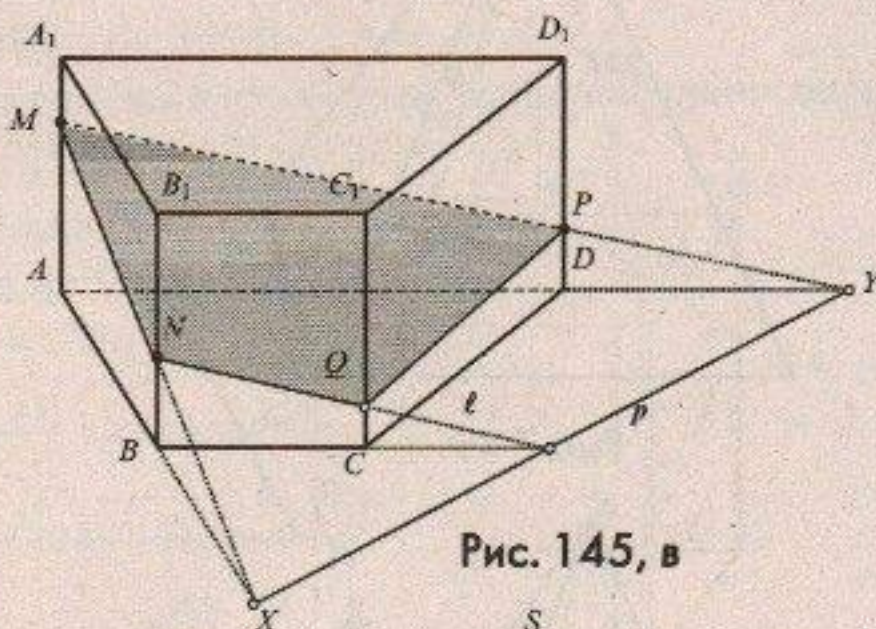


Рис. 145, в

Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три точки M, N, P в ее боковых гранях (рис. 146). Основные этапы алгоритма построения сечения показаны на рисунках 147–151.

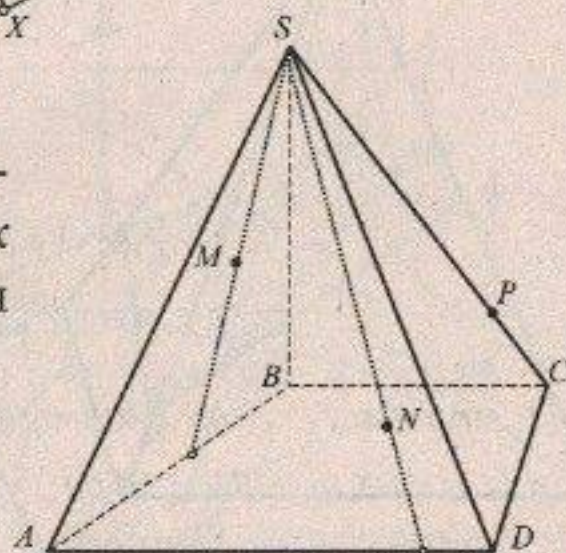


Рис. 146

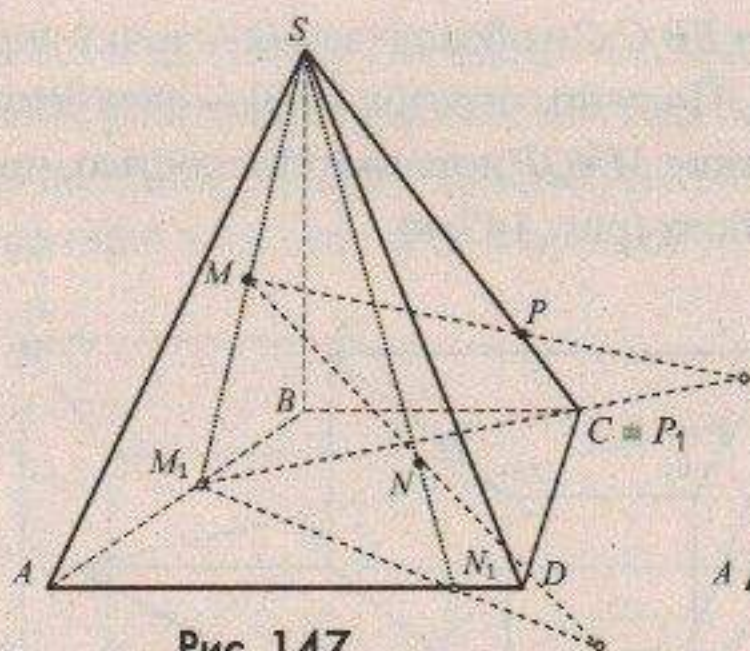


Рис. 147

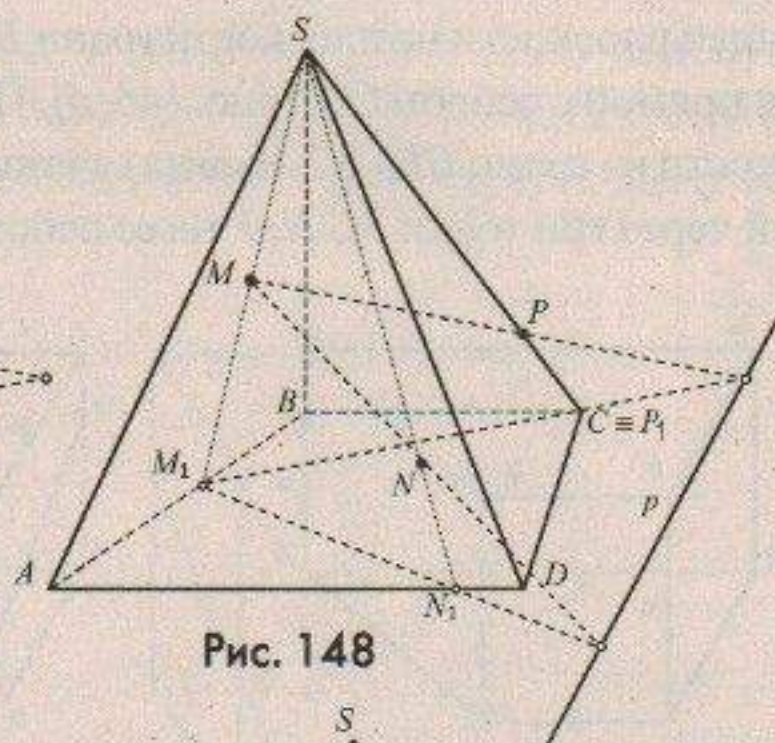


Рис. 148

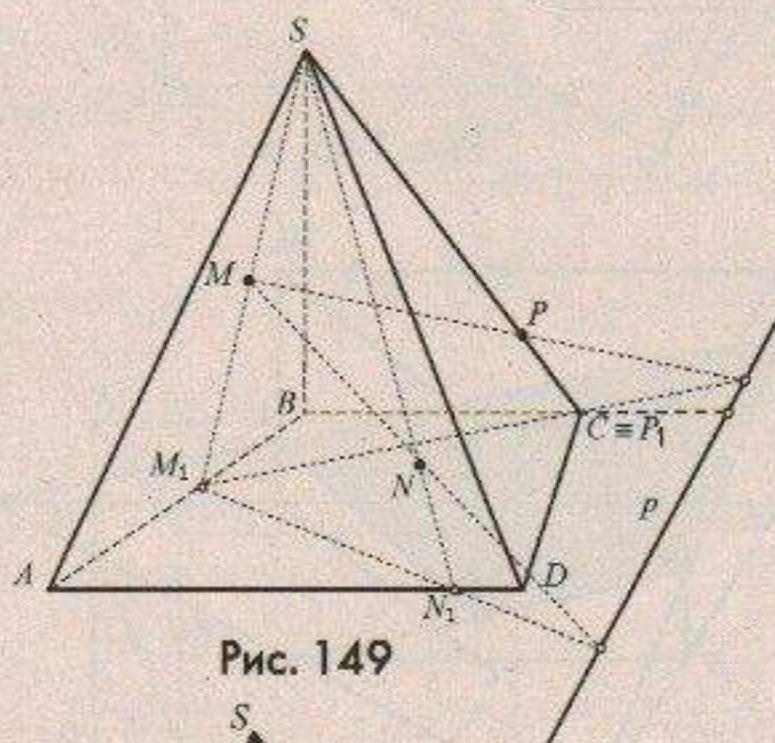


Рис. 149

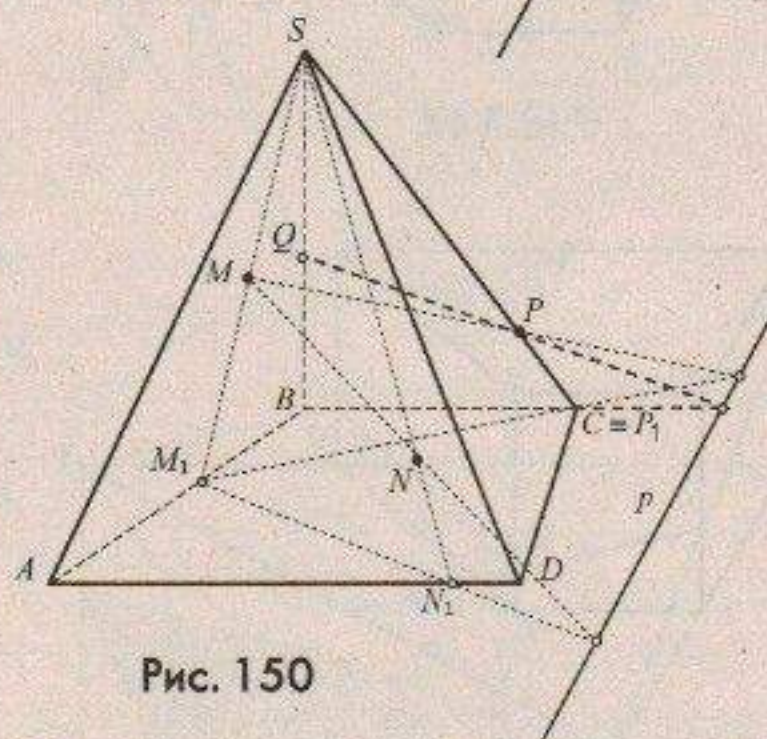


Рис. 150

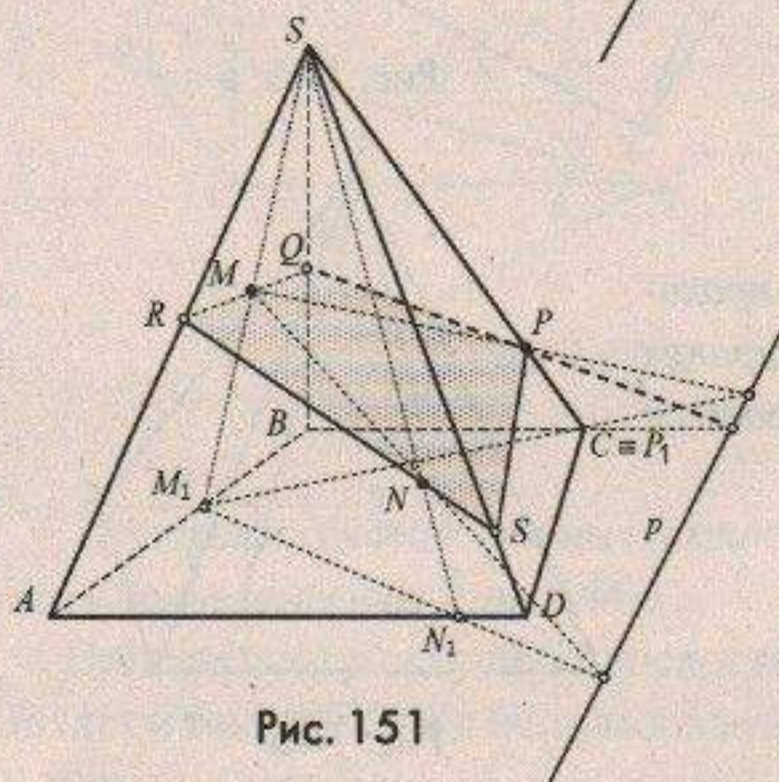


Рис. 151

Метод «следа секущей плоскости» имеет весьма ограниченную область применения, обусловленную алгоритмом действий в его реализации. Так, секущая плоскость должна быть задана тремя точками либо точкой и следом секущей на основной плоскости. Если же плоскость задана одной или двумя точками и какими-нибудь дополнительными условиями (параллельность или перпендикуляр-

ность ребру или грани и т.п.), применить метод не удастся. Да и в случае задания плоскости тремя точками M , N и P может возникнуть непредвиденное обстоятельство на этапе нахождения следа на основной плоскости: если одна из прямых MN , NP или MP окажется параллельной основной плоскости, нахождение следа на основной плоскости становится невозможным. Более того, в большинстве геометрических заданий необходимо определить форму построенного сечения, и метод следа здесь далеко не всегда дает эту возможность. В связи с вышесказанным рассмотрим еще один метод построения сечений многогранников.

2.4.2. Метод внутреннего проектирования

Суть метода состоит в нахождении точек пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами многогранника с использованием основной позиционной задачи 5. Стороны многоугольника сечения при этом будут являться отрезками, соединяющими построенные точки.

Построим сечение четырехугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками M , N , P в её боковых гранях (рис. 152).

Этапы решения показаны на рисунках 153:

- 1) $X = \beta \cap (CC_1)$, (PX) (основная задача 5, рис. 153, а);
- 2) $R = (PX) \cap (DD_1)$ (рис. 153, б);
- 3) (RN) , $S = (RN) \cap (AA_1)$ (рис. 153, в);

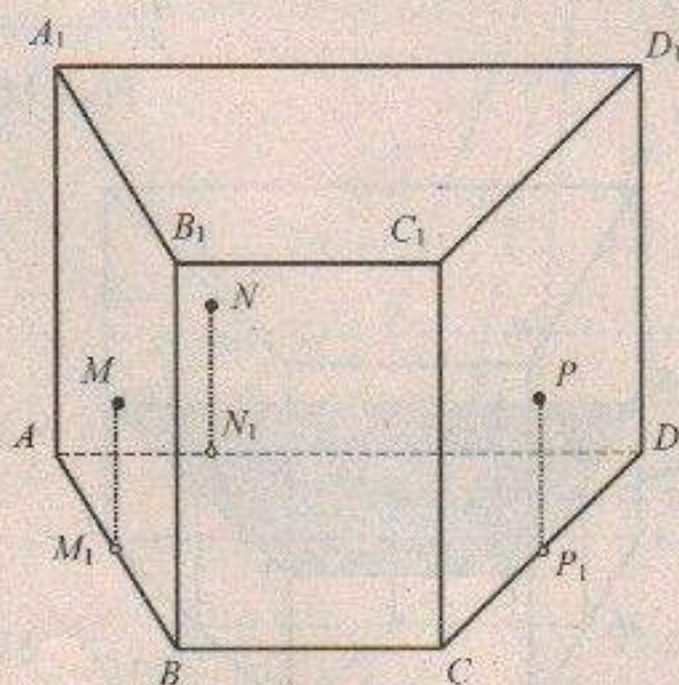


Рис. 152

- 4) $T = (SM) \cap (BB_1)$ (рис. 153, з), $[TX]$;
 5) $XRST$ — искомое сечение (рис. 153, д).

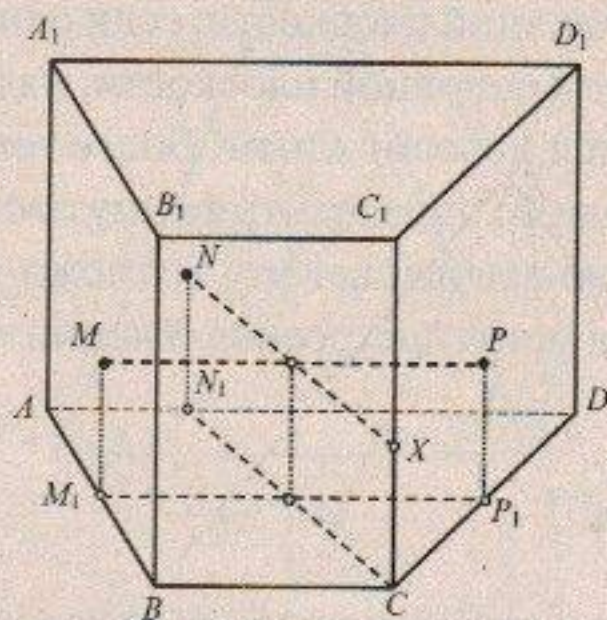


Рис. 153, а

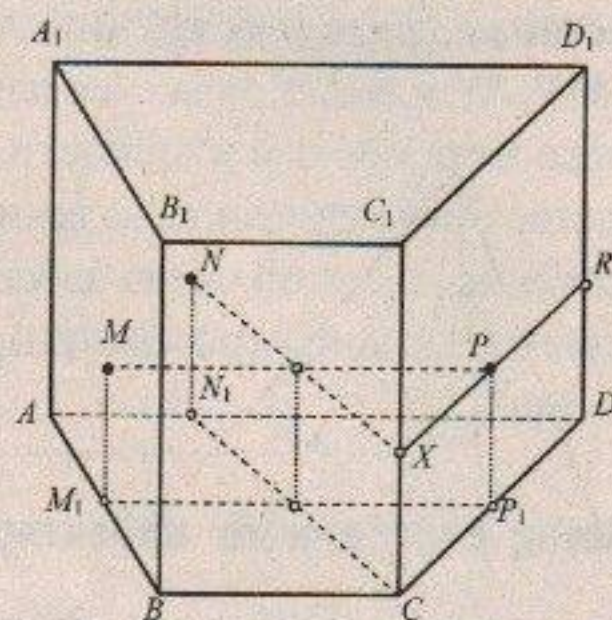


Рис. 153, б

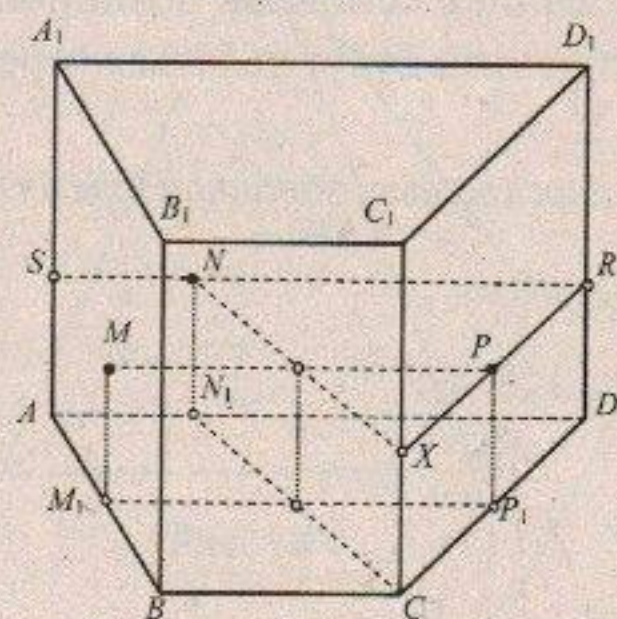


Рис. 153, в

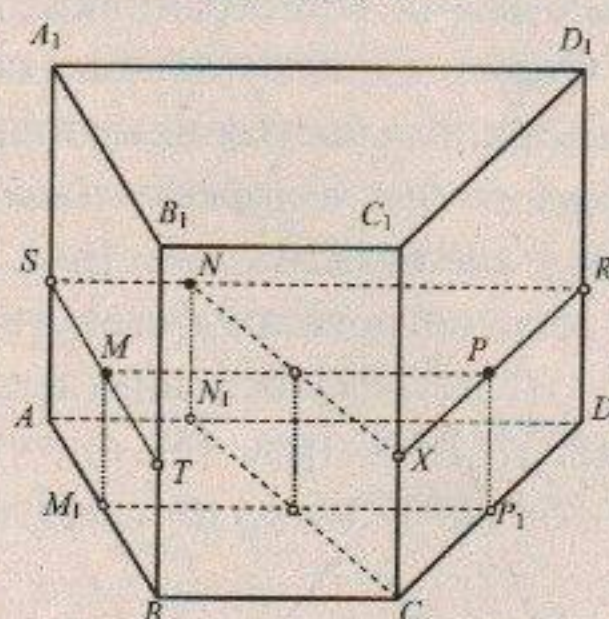


Рис. 153, г

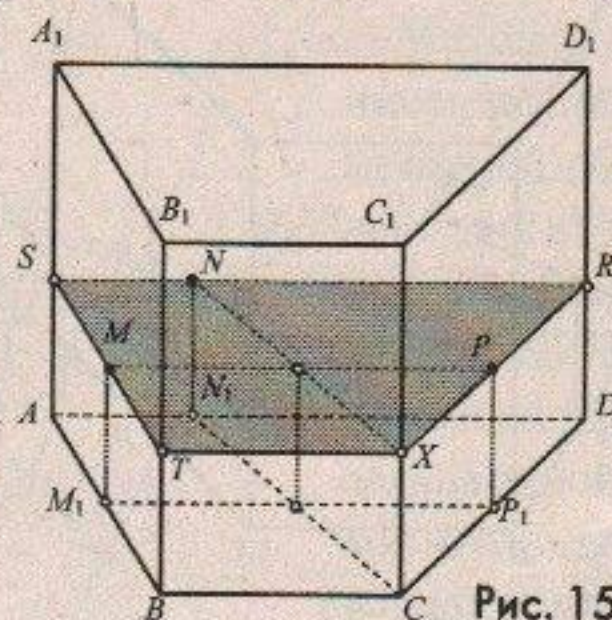


Рис. 153, д

Построим сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через три точки M , N и P , лежащие в его гранях (рис. 154). Основные этапы алгоритма построения сечения показаны на рисунках 155–159.

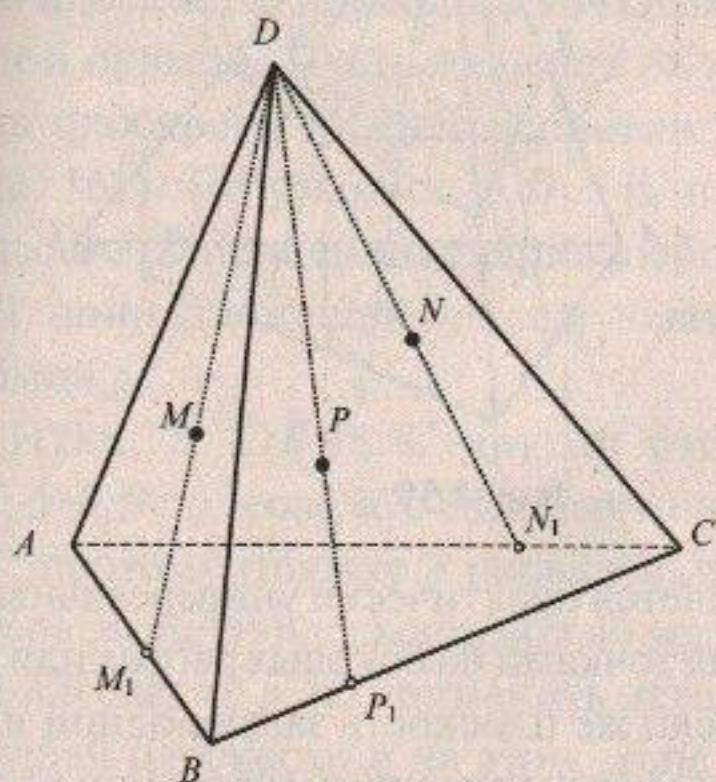


Рис. 154

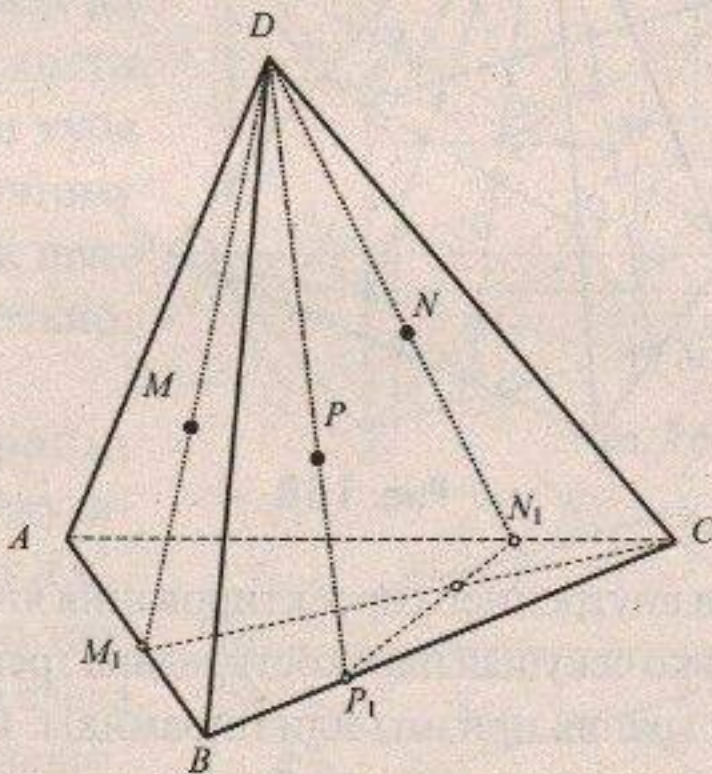


Рис. 155

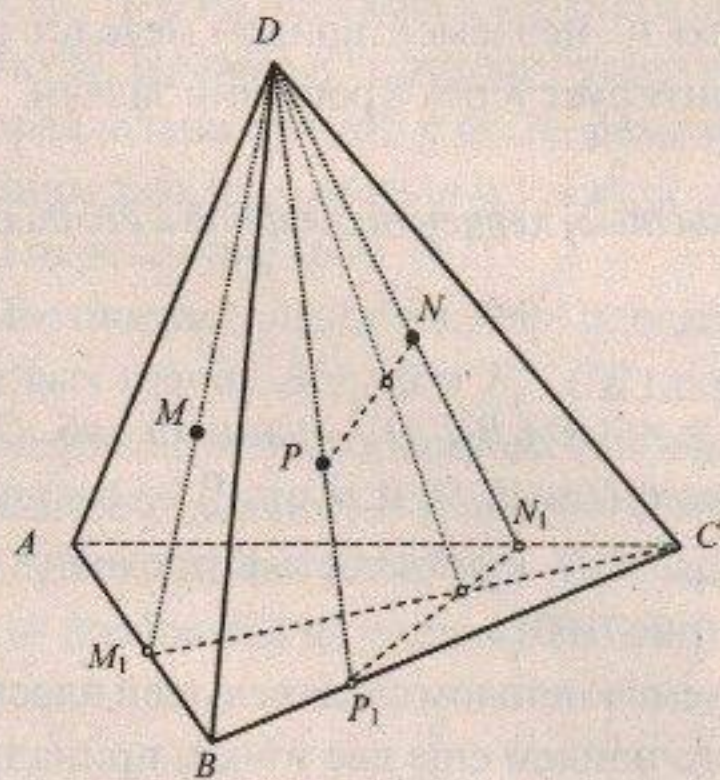


Рис. 156

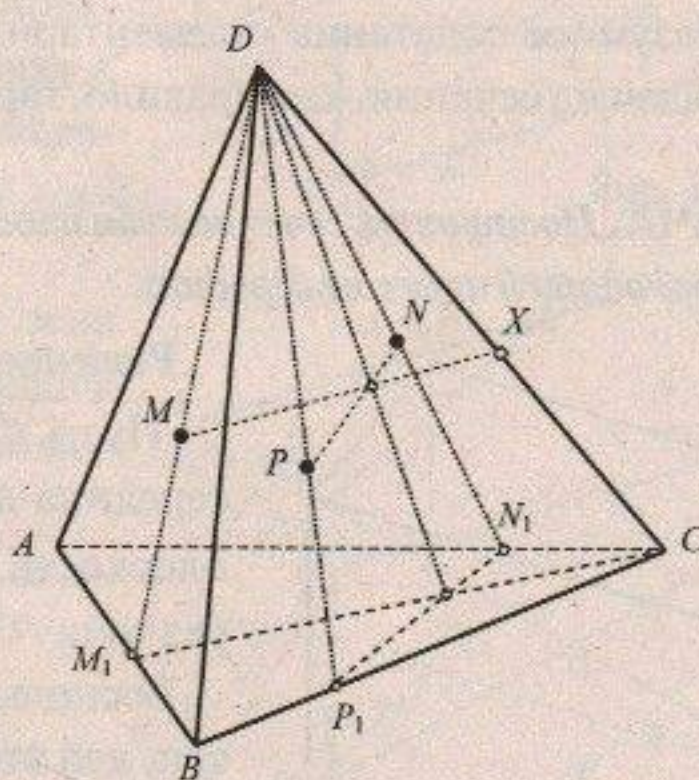


Рис. 157

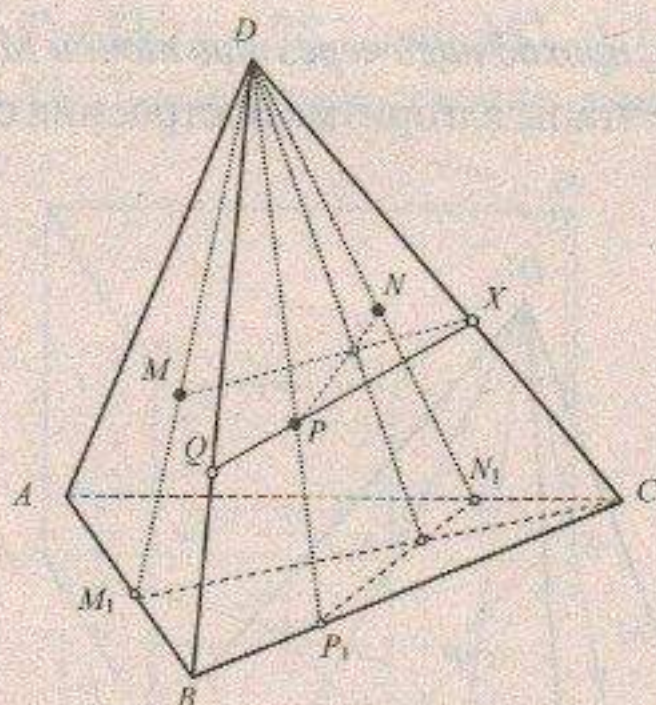


Рис. 158

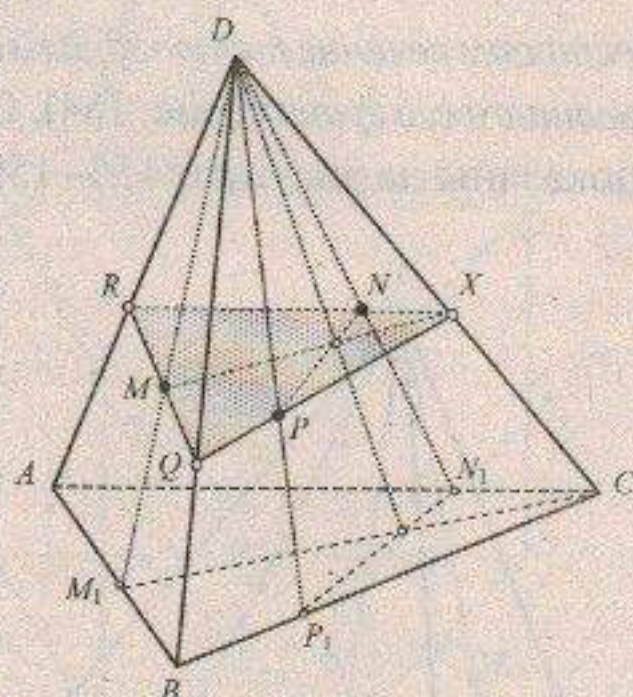


Рис. 159

Метод внутреннего проектирования является практически универсальным, если только секущая плоскость задана тремя точками на боковых ребрах или на боковых гранях призмы или пирамиды. Если же плоскость задана одной или двумя точками и какими-нибудь дополнительными условиями (параллельность или перпендикулярность ребру или грани и др.), применить метод не удастся. Да и сами этапы данного метода не являются очевидными и просто реализуемыми. Разумное сочетание «элементарных» и «неэлементарных» методов решения задач на сечения, как правило, гарантирует успех в решении задачи.

ЗАДАЧА. Построить сечение куба плоскостью, перпендикулярной к его диагонали и проходящей через ее середину.

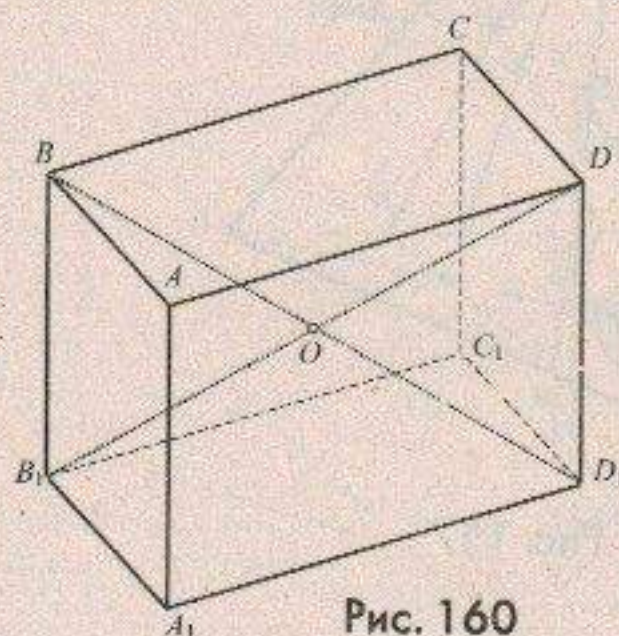


Рис. 160

Решение.

Пусть $\Phi = ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, O — середина диагонали B_1D ; и пусть β — секущая плоскость, $\beta \perp B_1D$, и плоскость β проходит через точку O (рис. 160).

Воспользуемся методом следа секущей плоскости, для этого найдем еще две точки, принадлежащие секущей плоскости. Обозначим KL — след β на плоскости BDD_1 (рис. 161). По условию $\beta \perp (B_1D)$, поэтому KL — перпендикуляр к B_1D .

Итак, есть три точки — O , K , L в секущей плоскости, однако их недостаточно для того, чтобы воспользоваться методом следа секущей плоскости, поскольку точки лежат на одной прямой. Пусть p — след плоскости β на плоскости нижнего основания куба (рис. 161). По условию $B_1D \perp \beta$, поэтому прямая B_1D перпендикулярна любой прямой, принадлежащей β , и, следовательно, прямой p .

Итак, $p \perp B_1D$. С другой стороны, $A_1C_1 \perp B_1D$ по теореме о трех перпендикулярах, поэтому прямая p параллельна A_1C_1 . Теперь секущую плоскость можно задать точкой K и следом p , но применить метод следа секущей плоскости и на этом этапе невозможно, поскольку нет точек секущей плоскости в боковых гранях. Найдем след RS плоскости β на плоскости верхнего основания куба. Прямая RS проходит через точку K и параллельна прямой p по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью (рис. 162).

Построения следов секущей плоскости на боковых гранях B_1A_1AB и B_1C_1CB проводим стандартно с использованием основной позиционной задачи № 3 (рис. 163–164).

Шестиугольник $PNRSTQ$ — искомое сечение — изображен на рисунке 165.

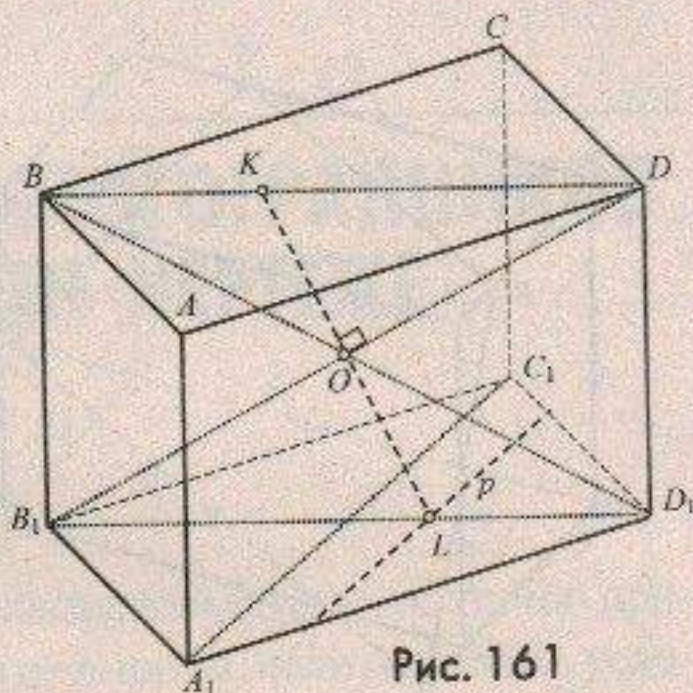


Рис. 161

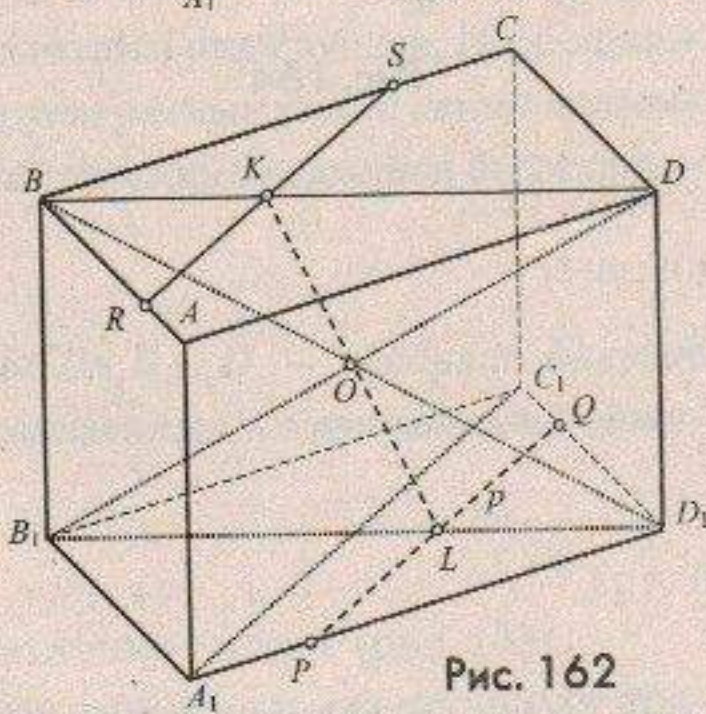


Рис. 162

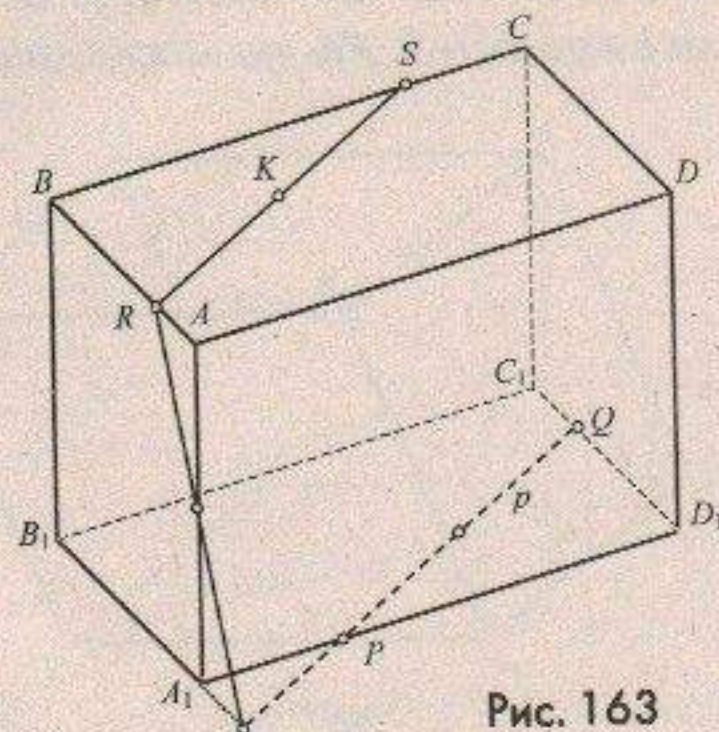


Рис. 163

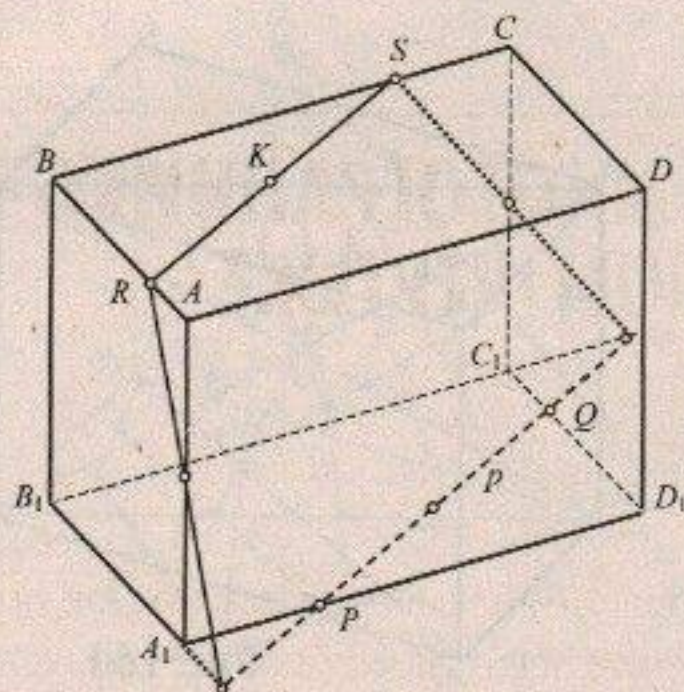


Рис. 164

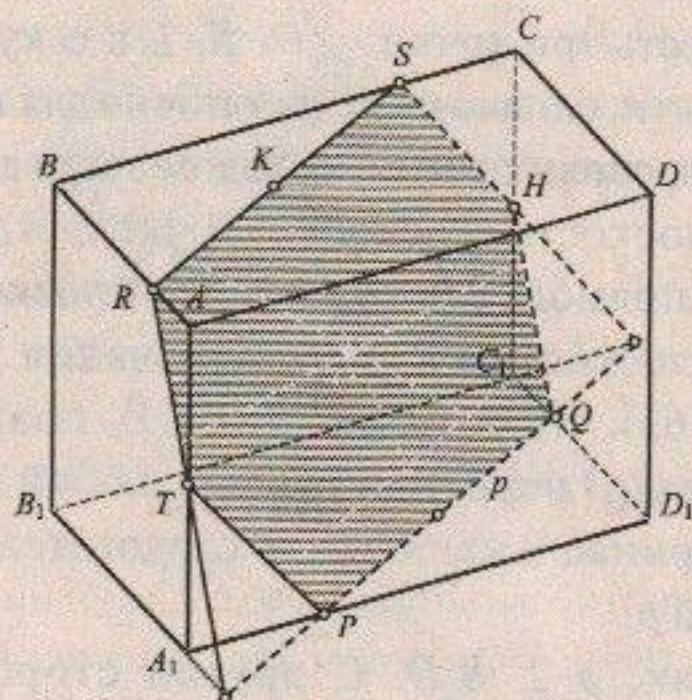


Рис. 165

ГЛАВА 3

ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ НА ПОЛНОМ ЧЕРТЕЖЕ

3.1. ВЫСОТА МНОГОГРАННИКА

Абсолютное большинство заданий на определение элементов наклонной призмы требуют точного определения положения ее высоты, если, конечно, условие задачи не содержит четких указаний. Рассмотрим ряд случаев, где решающую роль играет теорема 1. «Если прямая образует равные углы с двумя прямыми, лежащими в плоскости, то ее ортогональная проекция является биссектрисой угла, образованного этими прямыми».

ПРИМЕР 1. Основание параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадрат. Боковое ребро AA_1 образует равные острые углы с пересекающимися его сторонами основания. Изобразить высоту параллелепипеда.

Решение.

Изобразим высоту $A_1 P$, для чего найдем положение точки P (рис. 166).

По условию задачи $\angle A_1 A D = \angle A_1 A B$, поэтому ортогональная проекция прямой AA_1 является биссектрисой угла BAD . Далее, поскольку $ABCD$ — квадрат, то биссектриса угла BAD является диагональю AC . Итак, точка P принадлежит диагонали AC квадрата $ABCD$.

Заметим, что по определению перпендикуляра к плоскости $\angle A P A_1 = 90^\circ$, т.е. в оригинале треугольник $AA_1 P_1$ прямоугольный.

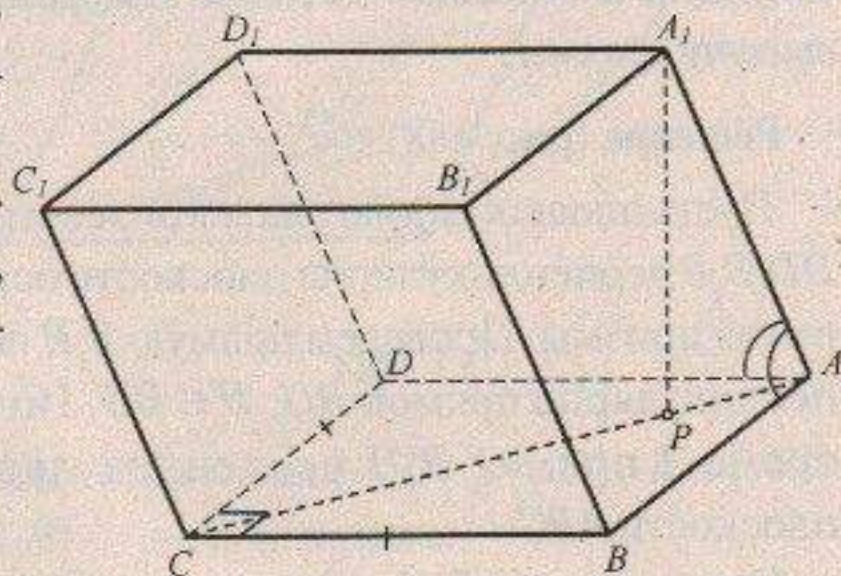


Рис. 166

ПРИМЕР 2. Все девять ребер наклонной треугольной призмы равны. Изобразить высоту призмы.

Решение.

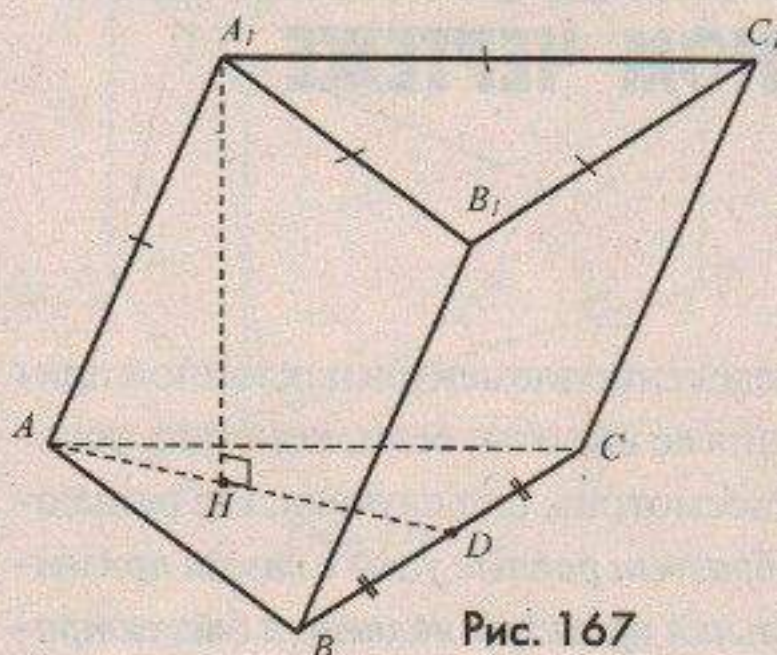


Рис. 167

Проведем высоту A_1H (рис. 167). По условию задачи AA_1B_1B и AA_1C_1C — равные ромбы, поэтому $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, и тогда по теореме 1 точка H принадлежит биссектрисе AD угла BAC .

В равностороннем треугольнике ABC биссектриса является медианой. Итак, точка H принадлежит медиане AD треугольника ABC .

Высота многогранника, одна из боковых граней которого перпендикулярна плоскости основания, будет принадлежать этой грани по теореме 2: «Если две плоскости перпендикулярны и в одной из них проведена прямая, перпендикулярная к линии пересечения плоскостей, то эта прямая будет перпендикулярна ко второй плоскости».

ПРИМЕР 3. Основание призмы — трапеция. Одно из диагональных сечений перпендикулярно плоскости основания. Изобразить высоту призмы.

Решение (рис. 168).

Пусть плоскость диагонального сечения DD_1B_1B перпендикулярна плоскости основания призмы. Проведем прямую B_1H перпендикулярно прямой BD , $H \in BD$. По теореме 2 прямая B_1H перпендикулярна плоскости ABC .

Итак, отрезок B_1H — высота призмы.

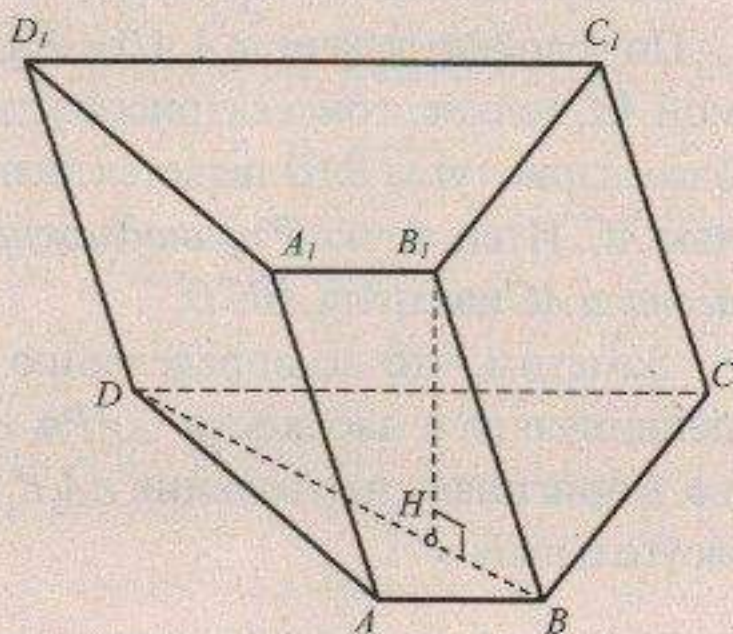


Рис. 168

ПРИМЕР 4. Основание призмы — прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов этого треугольника, является квадратом. Изобразить высоту призмы.

Решение (рис. 169).

Пусть грань BB_1C_1C — квадрат, в треугольнике ABC угол C — прямой. Имеем: $(BC) \perp (CC_1)$, $(BC) \perp (AC)$, тогда (BC) — перпендикуляр к плоскости грани ACC_1A_1 . По признаку перпендикулярности плоскостей: $(ABC) \perp (ACC_1)$. Проведем $(C_1H) \perp (AC)$, $H \in (AC)$. По теореме 2 прямая C_1H перпендикулярна плоскости ABC . Итак, $[C_1H]$ — высота призмы.

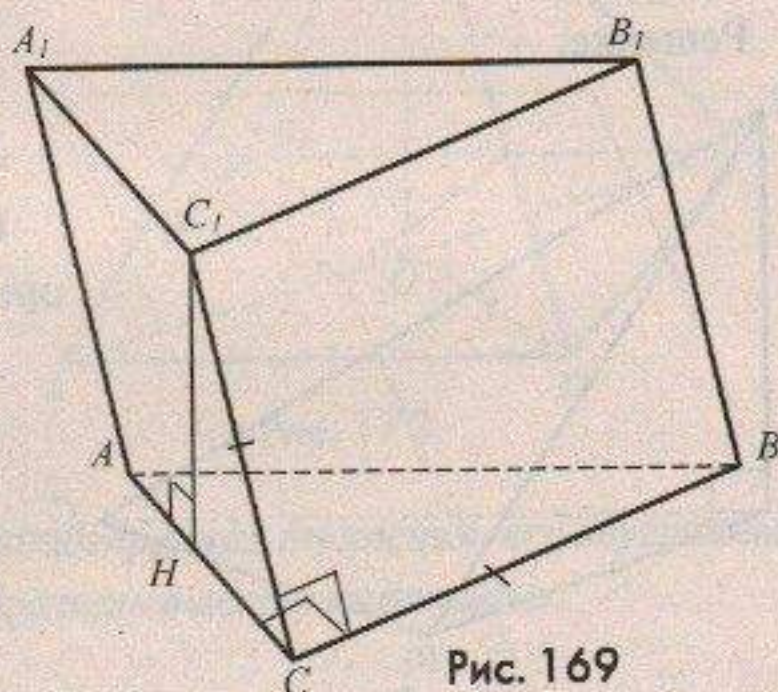


Рис. 169

ПРИМЕР 5. Основание наклонного параллелепипеда — ромб, одно из диагональных сечений — прямоугольник. Изобразить высоту параллелепипеда.

Решение (рис. 170).

Пусть BB_1D_1D — прямоугольник, O и O_1 — центры оснований. По свойству диагоналей ромба прямые BO и AO перпендикулярны; по свойству средней линии прямоугольника прямые BO и OO_1 перпендикулярны. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая BO будет перпендикулярна плоскости диагонального сечения AA_1C_1C , но тогда плоскости ABC и AA_1C будут перпендикулярны по признаку перпендикулярности плоскостей. Проводим $(A_1H) \perp (AC)$, $H \in (AC)$. По теореме 2: $(A_1H) \perp (ABC)$. Итак, $[A_1H]$ — высота призмы.

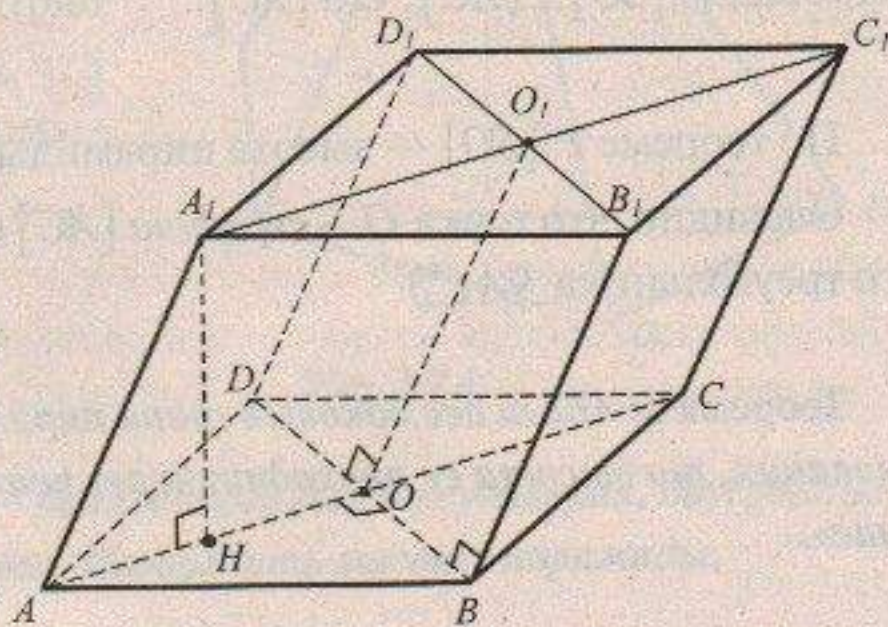


Рис. 170

ПРИМЕР 6. Основание пирамиды — правильный треугольник. Одна из боковых граней — равнобедренный прямоугольный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Изобразить высоту пирамиды.

Решение.

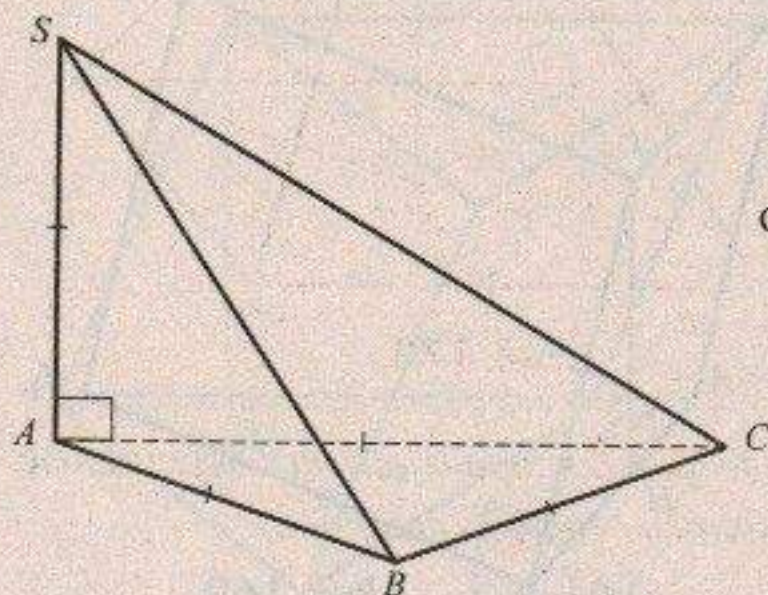


Рис. 171

1-й случай (рис. 171)

Пусть $(SAC) \perp (ABC)$, $\angle SAC = 90^\circ$. По теореме 2 отрезок SA — высота пирамиды.

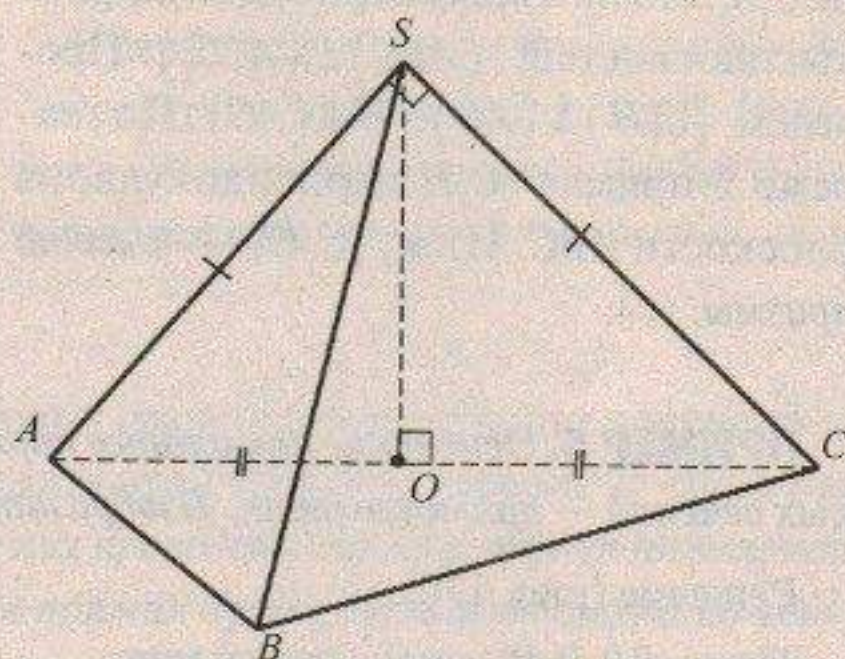


Рис. 172

2-й случай (рис. 172)

Пусть $(SAC) \perp (ABC)$, $\angle ASC = 90^\circ$.
Проведем $[SO] \perp (AC)$, $O \in [AC]$.

По теореме 2: $[SO]$ — высота пирамиды.

Очевидно, что точка O — середина $[AC]$ (по свойству высоты равнобедренного треугольника SAC).

Теорема 3: «Если все боковые грани пирамиды равнонаклонны к плоскости основания, то высота ее проходит через центр окружности, вписанной в основание».

ПРИМЕР 7. Основание пирамиды — ромб, все боковые грани равнонаклонны к плоскости основания. Изобразить высоту пирамиды.

Решение.

Пусть $[SO]$ — высота пирамиды (рис. 173). По свойству пирамиды, у которой все боковые грани равнонаклонны к плоскости основания, O — центр вписан-

ной в ромб $ABCD$ окружности, т.е. O — точка пересечения диагоналей AC и BD .

Как и в примерах 1–2, плоские углы SOA, SOB, SOC, SOD — прямые (по определению перпендикуляра к плоскости).

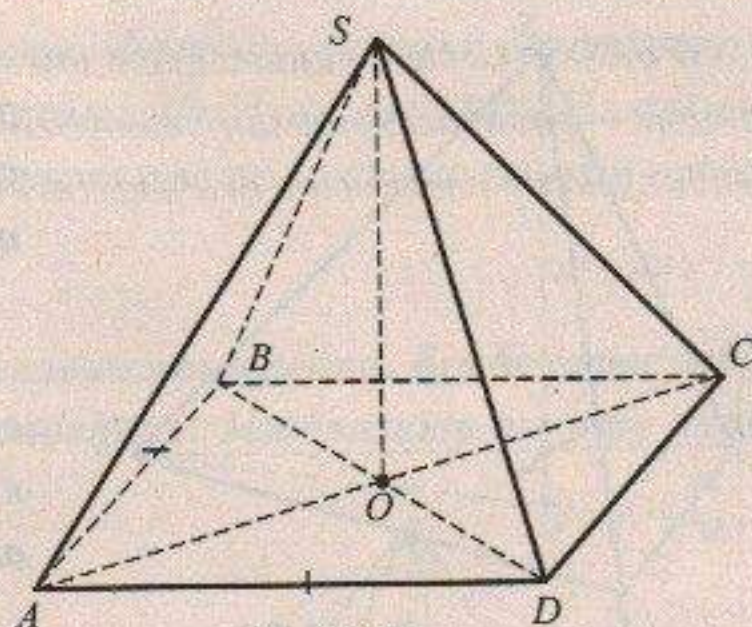


Рис. 173

ПРИМЕР 8. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, все двугранные углы при сторонах основания равны. Изобразить высоту пирамиды.

Решение.

Пусть O — основание высоты пирамиды (рис. 174). По свойству пирамиды O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, т.е. точка пересечения биссектрис ее внутренних углов. Известно также, что O — середина отрезка KL , где K и L — середины оснований трапеции.

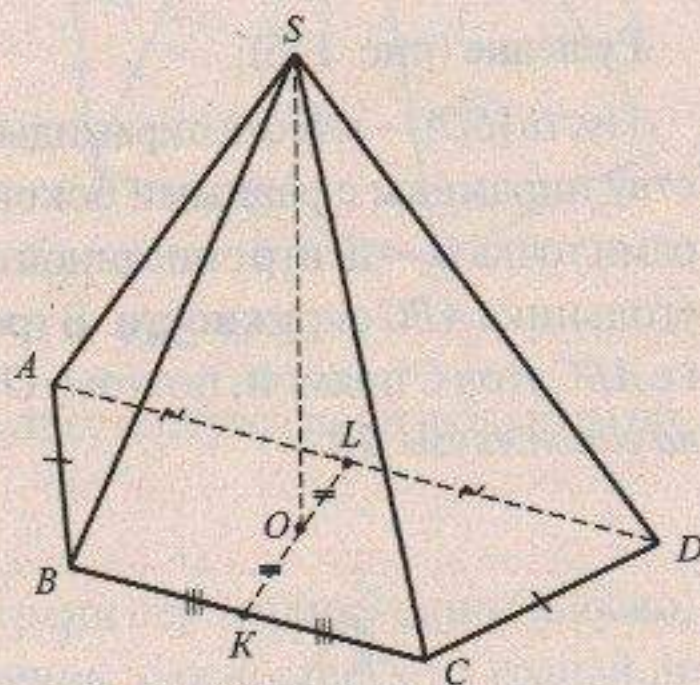


Рис. 174

ПРИМЕР 9. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, двугранные углы при всех сторонах основания равны. Изобразить высоту пирамиды.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC : $AB = BC$ (рис. 175).

Обозначим $[SO]$ — высоту пирамиды. По свойству пирамиды O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , т.е. точка пересечения биссектрис внутренних углов этого треугольника.

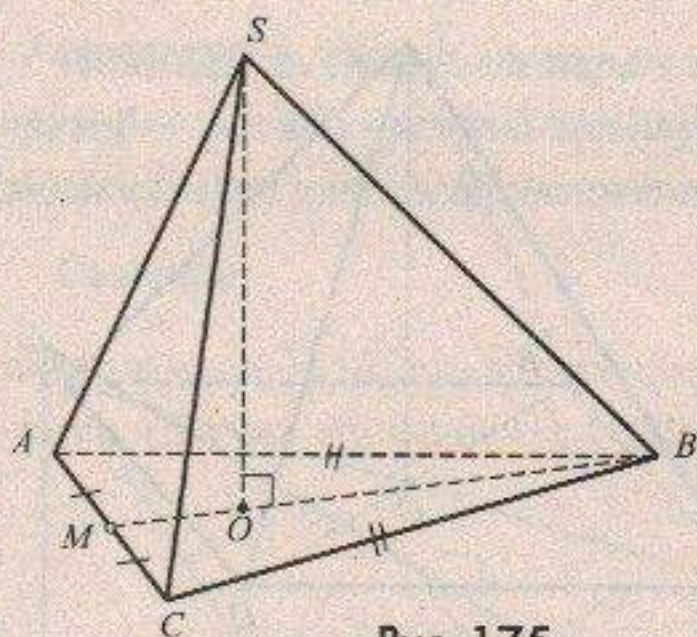


Рис. 175

Одной из таких биссектрис является медиана BM к стороне BC . Итак, $O \in [BM]$. На проекционном чертеже точка O занимает произвольное положение внутри отрезка BM .

Теорема 4: «Высота пирамиды, все боковые ребра которой равны или равнонаклонны к плоскости основания, проходит через центр описанной около основания окружности».

ПРИМЕР 10. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник. Все боковые ребра пирамиды равны между собой. Изобразить высоту пирамиды.

Решение (рис. 176).

Пусть $[SO]$ — высота пирамиды. По свойству пирамиды с равными боковыми ребрами точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. В треугольнике ABC угол C прямой, поэтому O — середина гипотенузы AB .

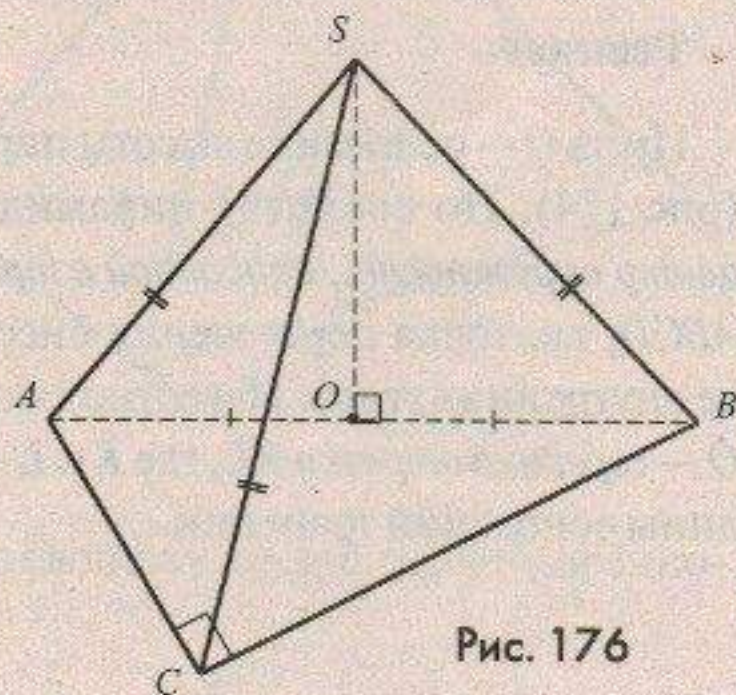


Рис. 176

ПРИМЕР 11. В треугольной пирамиде все боковые ребра и два ребра основания равны. Изобразить высоту пирамиды.

Решение (рис. 177).

Пусть в пирамиде $SABC$ ребра SA, SB, SC, AB, BC равны. Найдем положение высоты $[SO]$ пирамиды. По свойству пирамиды O — центр описанной около треугольника ABC

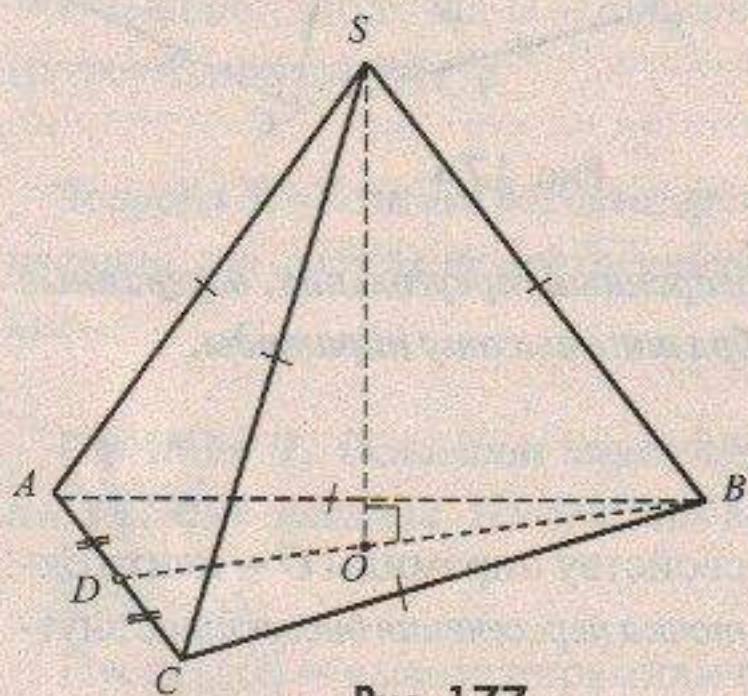


Рис. 177

окружности, т.е. точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Одним из таких перпендикуляров будет медиана BD . Итак, $O \in [BD]$. На проекционном чертеже точка O занимает произвольное положение внутри отрезка BD .

ПРИМЕР 12. Основанием пирамиды является трапеция. Все боковые ребра пирамиды равнонаклонны к плоскости основания. Изобразить высоту пирамиды.

Решение (рис. 178).

Пусть $[SO]$ — высота пирамиды. По свойству пирамиды с равнонаклонными боковыми ребрами точка O — центр описанной около трапеции $ABCD$ окружности, т.е. точка пересечения серединных перпендикуляров к ее сторонам. В планиметрии доказывается, что трапеция, вокруг которой описана окружность, является равнобедренной, поэтому $O \in [KL]$, где K и L — середины оснований трапеции.

Выбор точки O на прямой KL (внутри или вне отрезка KL) на проекционном чертеже осуществляется произвольным образом.

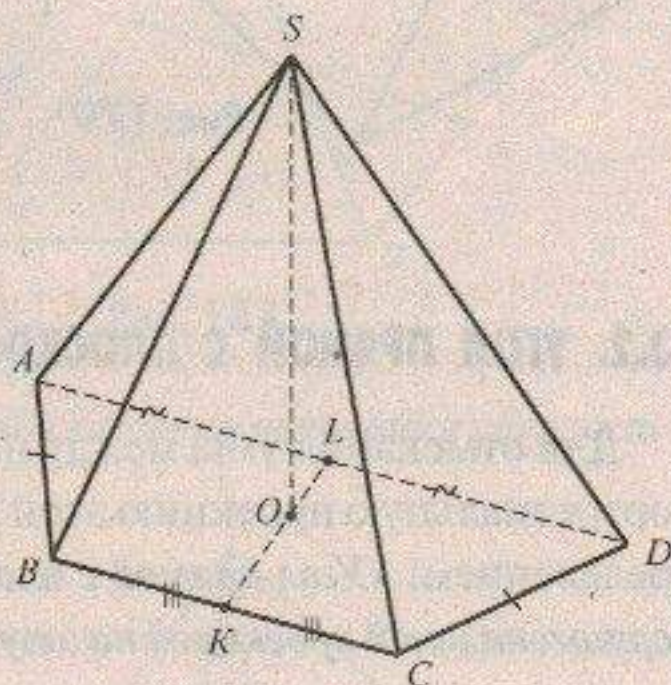


Рис. 178

Высота пирамиды, у которой две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, принадлежит линии пересечения плоскостей этих граней по теореме 5: «Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна той же плоскости».

ПРИМЕР 13. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник; боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны плоскости основания. Изобразите высоту пирамиды.

Решение (рис. 179).

Пусть $SABC$ — данная пирамида, $\angle ACB = 90^\circ$, $(SBC) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$. По теореме 5 высотой пирамиды является отрезок $[SC]$.

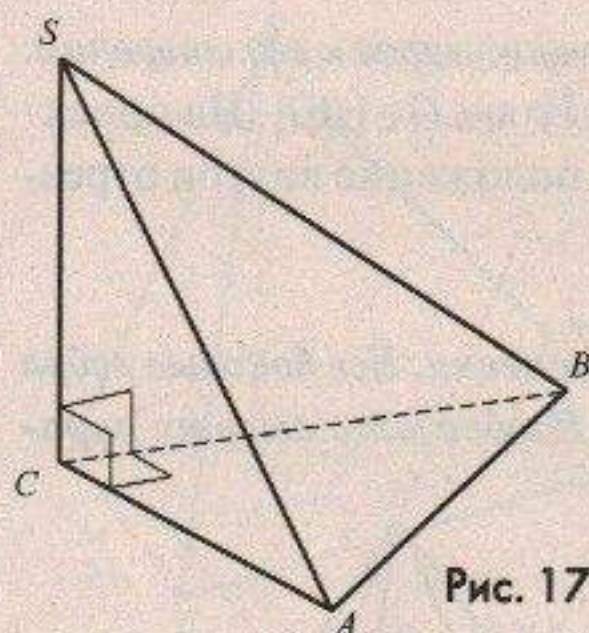


Рис. 179

Полезно использовать полученный вывод для выяснения формы граней SBC и SAC . По определению прямой, перпендикулярной плоскости, получим: $(SC) \perp (BC)$, $(SC) \perp (AC)$, откуда следует, что $\angle SCB = \angle SCA = 90^\circ$.

3.2. УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Для отыскания угла между наклонной и плоскостью достаточно построить ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость и воспользоваться определением: «Угол прямой с плоскостью — это угол, образованный прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость».

ПРИМЕР 1. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β . Изобразить угол β .

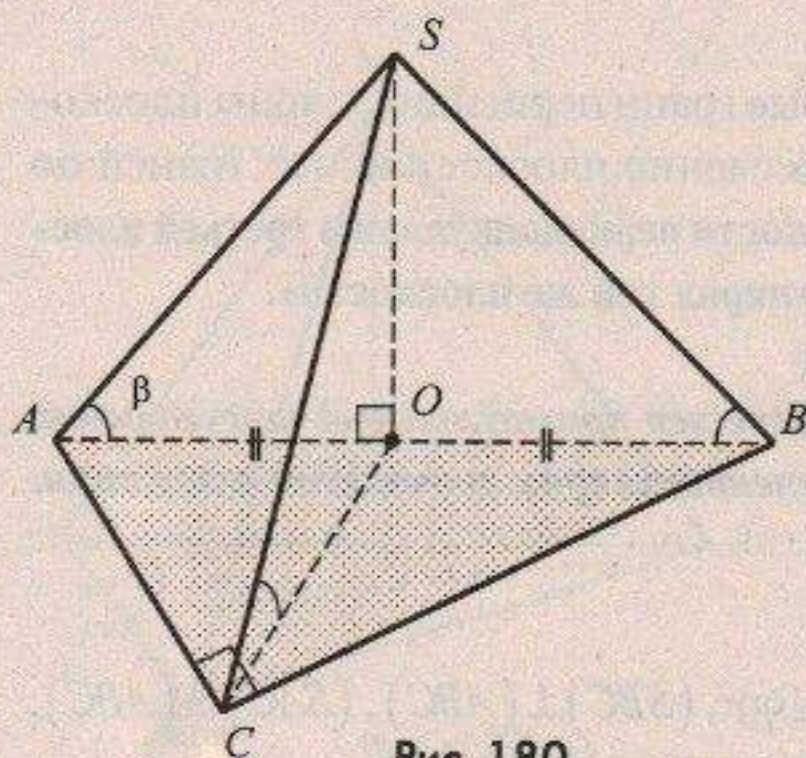


Рис. 180

Решение.

Пусть $[SO]$ — высота пирамиды (рис. 180). По свойству пирамиды с равнонаклонными ребрами точка O — середина $[AB]$.

Имеем: (SA) — наклонная к (ABC) , (AO) — ортогональная проекция (SA) на (ABC) , тогда $\angle SAO$ — угол прямой SA с плоскостью ABC , т.е. $\angle SAO = \beta$.

Аналогично $\angle SBO = \angle SCO = \beta$.

ПРИМЕР 2. Основание пирамиды — квадрат, высота пирамиды проходит через вершину основания. Изобразить углы наклона боковых ребер к плоскости основания.

Решение.

Пусть $[SB]$ — высота пирамиды (рис. 181).

$$\angle(SC, ABC) = \angle SCB,$$

$$\angle(SD, ABC) = \angle SDB,$$

$$\angle(SA, ABC) = \angle SAB.$$

Очевидно, что $\angle SCB = \angle SAB$ (из равенства треугольников SBC и SBA).

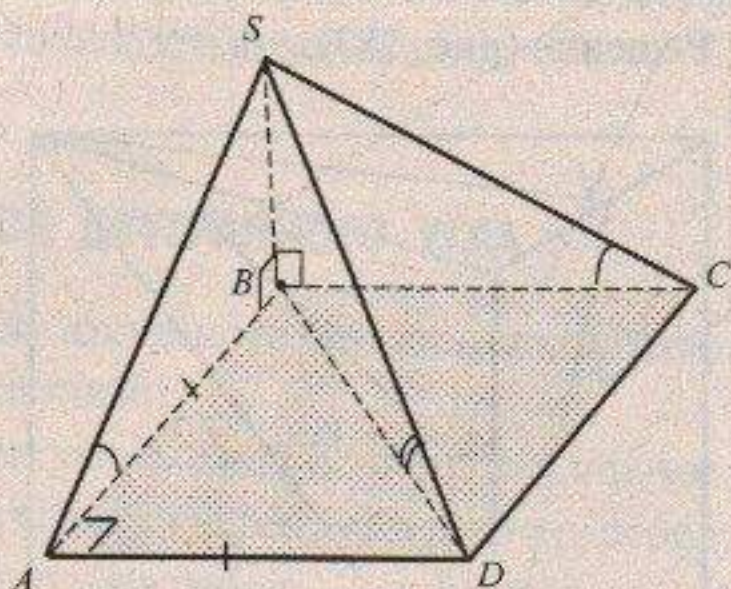


Рис. 181

ПРИМЕР 3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания образует с боковой гранью угол α . Изобразить угол α .

Решение.

Пусть $\alpha = \angle(AB, SBC)$ (рис. 182). Найдем ортогональную проекцию (AB) на (SBC) , для чего построим проекцию точки A на эту плоскость.

Пусть L — середина $[BC]$, тогда $(SAL) \perp (SBC)$. Действительно, $(BC) \perp (SAL)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Далее, $(SBC) \perp (SAL)$ по признаку перпендикулярности плоскостей.

К прямой (SL) — линии пересечения этих плоскостей — проведем перпендикуляр $[AD]$, тогда по теореме 2 из 3.1. будем иметь $(AD) \perp (SBC)$, поэтому точка D — ортогональная проекция A на (SBC) . Итак, (BD) — ортогональная проекция прямой (AB) на (SBC) , и тогда $\alpha = \angle ABD$.

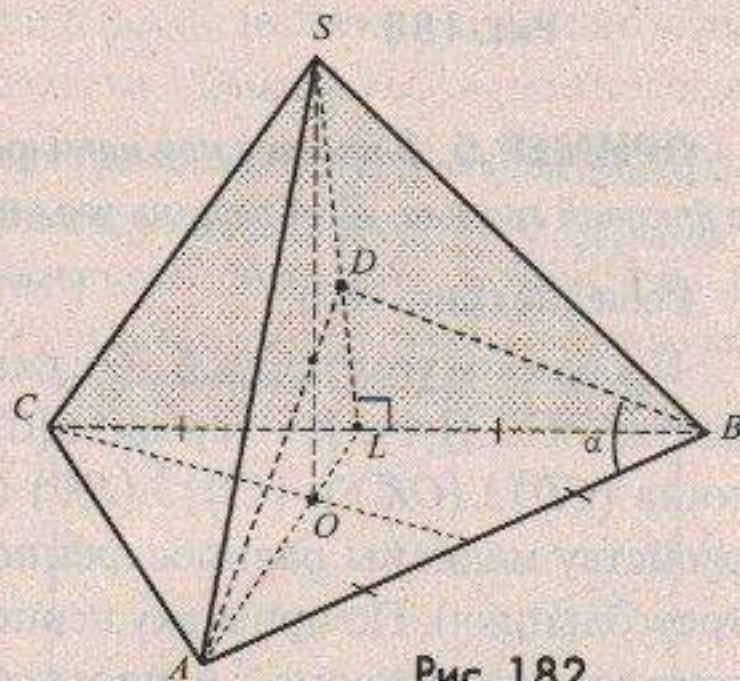


Рис. 182

ПРИМЕР 4. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани образует угол α с другой боковой гранью. Изобразить угол α .

Решение (рис. 183).

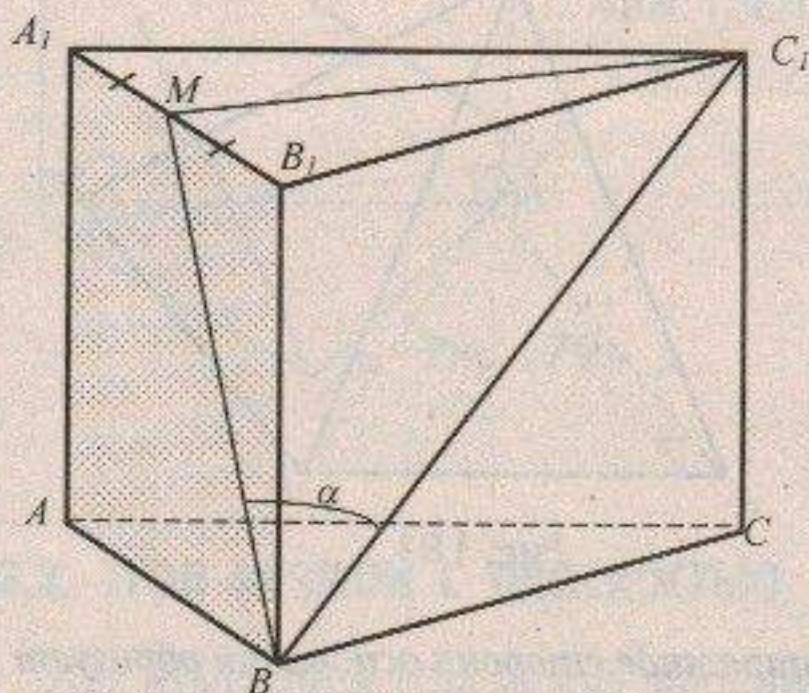


Рис. 183

Построим $\angle(BC_1, ABB_1)$. Проведем из точки C_1 перпендикуляр к (ABB_1) . Пусть M — середина $[A_1B_1]$, тогда $(C_1M) \perp (A_1B_1)$ по свойству медианы равнобедренного треугольника. Далее, поскольку $(A_1B_1C_1) \perp (ABB_1)$ и (A_1B_1) — линия пересечения этих плоскостей, то по теореме 2 из 3.1 имеем: $(C_1M) \perp (ABB_1)$.

Получили, что M — ортогональная проекция C_1 на (ABB_1) , тогда (BM) — ортогональная проекция (ABB_1) на эту плоскость. Искомый угол $\alpha = \angle C_1BM$.

ПРИМЕР 5. В правильной четырехугольной пирамиде высота образует угол α с боковой гранью. Изобразить угол α .

Решение (рис. 184).

Изобразим угол прямой SO с плоскостью SCD . Пусть K — середина $[CD]$, тогда $(CD) \perp (OK)$ и $(CD) \perp (SK)$ (по свойству медианы равнобедренного треугольника). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(CD) \perp (SOK)$, и тогда $(SCD) \perp (SOK)$ по признаку перпендикулярности плоскостей.

Прямая SK будет являться ортогональной проекцией прямой SO на плоскость SCD . Искомый угол $\alpha = \angle OSK$.

В задачах на вычисление полезно использовать метрическую зависимость угла α и плоского угла при вершине пирамиды. Если $\angle DSK = \varphi$, то

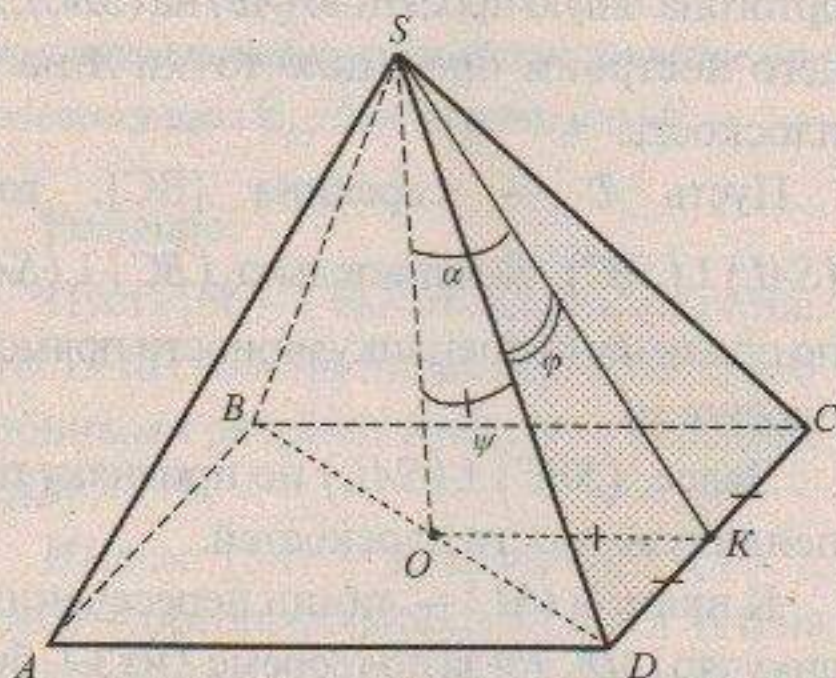


Рис. 184

$\operatorname{tg} \varphi = DK : SK = OK : SK = \sin \alpha$, т.е. $\operatorname{tg} \varphi = \sin \alpha$. Аналогично, если $\angle OSD = \psi$, то $\operatorname{tg} \psi = OD : OS = \sqrt{2} OK : OS = \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, т.е. $\operatorname{tg} \psi = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$. Получили метрическую зависимость угла α и угла бокового ребра с плоскостью основания.

3.3. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ЛИНЕЙНЫЙ УГОЛ ДВУГРАННОГО УГЛА

При построении на проекционном чертеже линейного угла данного двугранного угла пользуются следующими утверждениями:

- 1) линейный угол двугранного угла равен углу между перпендикулярами к ребру этого угла, проведенными в каждой из граней через любую точку ребра;
- 2) линейный угол не зависит от выбора точки на ребре.

В большинстве задач можно использовать алгоритм построения линейного угла, состоящий из этапов: а) выбираем точку на ребре двугранного угла; б) проводим в гранях угла полупрямые, перпендикулярные ребру; в) отмечаем угол, образованный полупрямыми.

ПРИМЕР 1. *Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположащее боковое ребро и образующая угол γ с плоскостью основания. Изобразить угол γ .*

Решение (рис. 185).

Пусть треугольник ABD — сечение призмы данной плоскостью. Очевидно, что $AD = BD$. Пусть K — середина $[AB]$, тогда $(DK) \perp (AB)$, $(CK) \perp (AB)$ по свойству медианы равнобедренного треугольника. Угол CKD — линейный угол двугранного угла с ребром AB .

Проведение вычислений элементов призмы, а также площадей основания и сечения существенно упростится с использованием формулы $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} \cdot \cos \gamma$, следующей из теоремы: «Площадь ортогональной проекции фигуры на плоскость равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции».

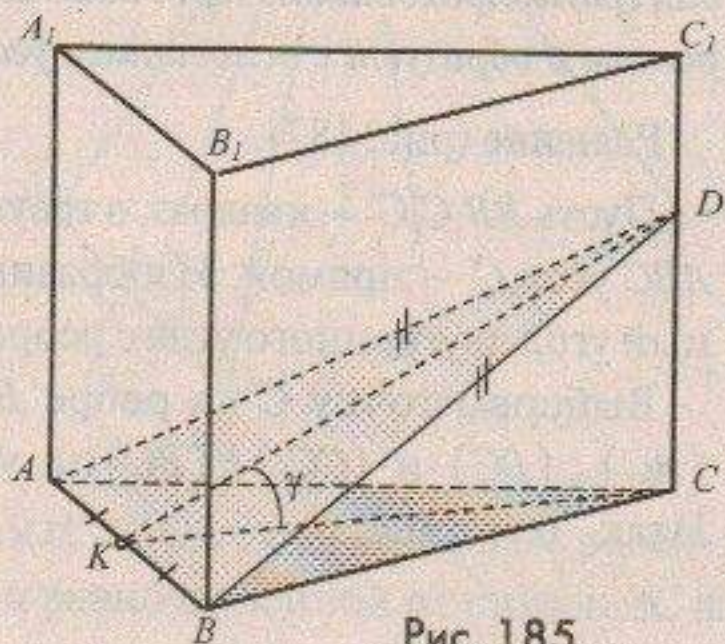


Рис. 185

ПРИМЕР 2. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник. Через один из катетов и противоположащую ему вершину верхнего основания проведена секущая плоскость, образующая угол α с плоскостью основания. Изобразить угол α .

Решение (рис. 186).

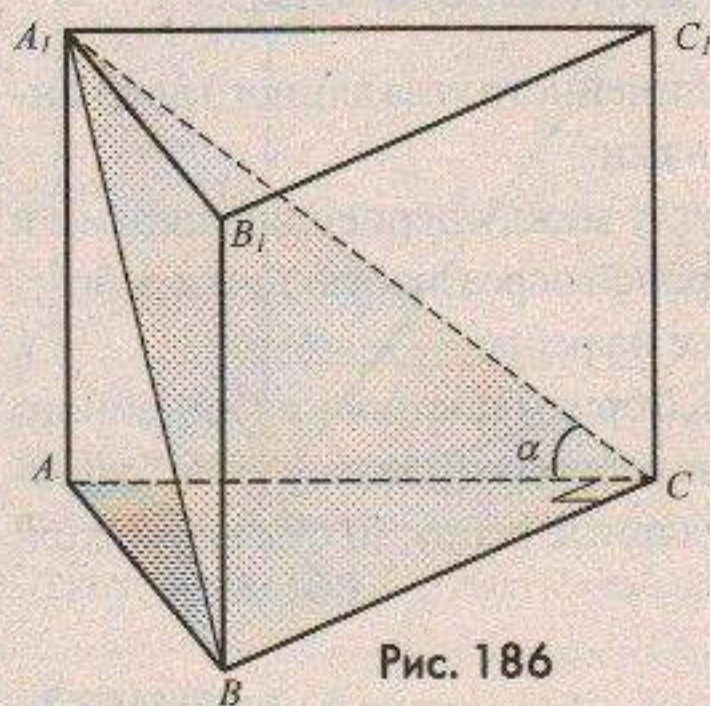


Рис. 186

Пусть в призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ угол ACB — прямой, треугольник BA_1C — искомое сечение. Построим линейный угол двугранного угла с гранями BA_1C и ABC . На ребре BC выбираем точку C ; по условию задачи $(AC) \perp (BC)$. По теореме о трех перпендикулярах $(A_1C) \perp (BC)$.

$$\alpha = \angle A_1CA.$$

ПРИМЕР 3. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов этого треугольника, является квадратом и образует с основанием угол α . Изобразить угол α .

Решение (рис. 187).

Пусть BB_1C_1C — квадрат, в треугольнике ABC угол C — прямой. Изобразим линейный угол двугранного угла с ребром BC .

Выберем точку C на ребре BC , тогда $(AC) \perp (BC)$ и $(CC_1) \perp (BC)$ по условию. Итак, $\alpha = \angle ACC_1$.

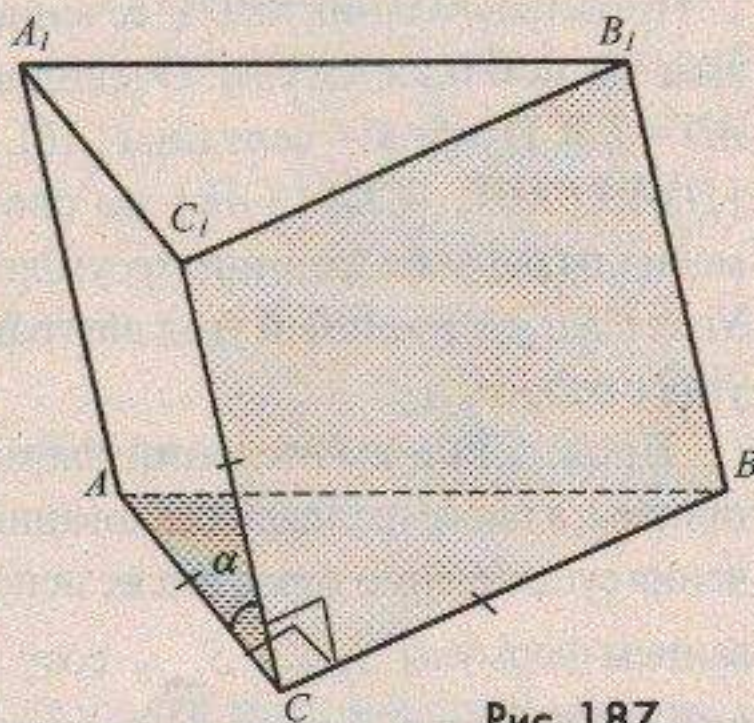


Рис. 187

ПРИМЕР 4. Основание пирамиды — ромб, каждый из двугранных углов при основании равен φ . Изобразить угол φ .

Решение (рис. 188).

Пусть $[SO]$ — высота пирамиды, O — центр ромба. Изобразим линейный угол двугранного угла с ребром CD . Выберем $K \in [CD]$ так, что $(OK) \perp (CD)$, тогда $(SK) \perp (CD)$ по теореме о трех перпендикулярах.

Итак, $\angle SKO = \varphi$.

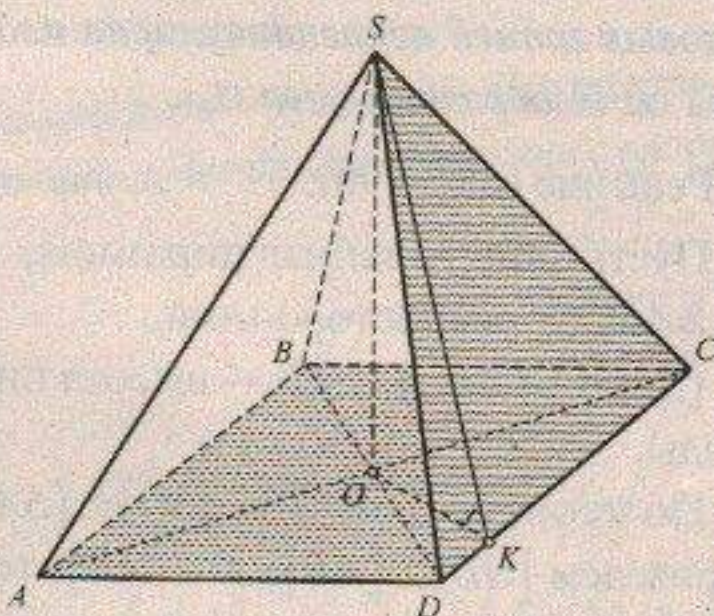


Рис. 188

ПРИМЕР 5. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания, а каждая другая боковая грань образует с плоскостью основания угол β . Изобразить угол β .

Решение (рис. 189).

Пусть в пирамиде $SABC$: $\angle ACB = 90^\circ$, $[SO]$ — высота пирамиды. По теореме 2 из 3.1 отрезок SO принадлежит грани SAB .

Проведем $[OK] \perp [AC]$, $K \in [AC]$, тогда $[SK] \perp [AC]$ по теореме о трех перпендикулярах и $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла с ребром AC .

Аналогично $\angle SLO = \beta$.

На изображении пирамиды отрезки OK и OL параллельны катетам BC и AC соответственно.

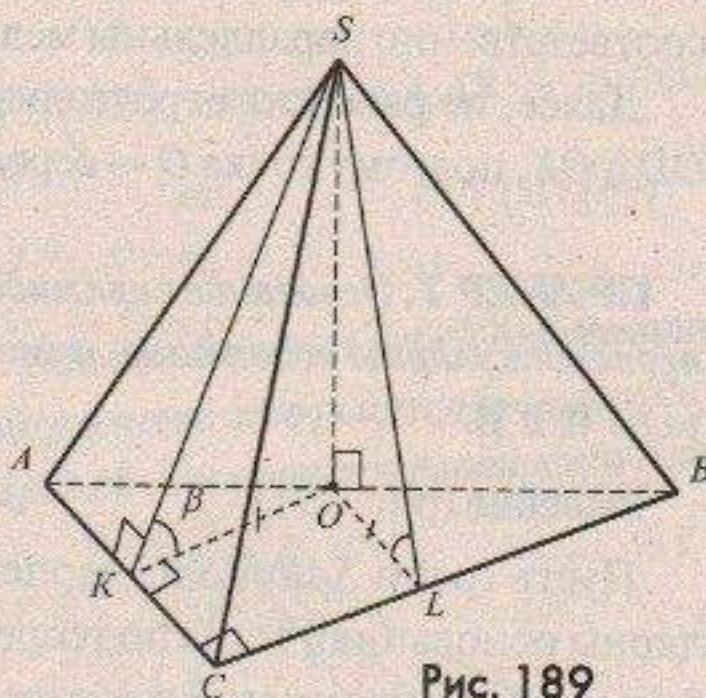


Рис. 189

Заметим, что из равенства треугольников SOK и SOL будет следовать равенство отрезков OK и OL . Далее, точка O , будучи равноудаленной от сторон AC и BC , будет принадлежать биссектрисе угла C (другими словами, OC — биссектриса $\angle ACB$).

ПРИМЕР 6. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, две другие составляют угол α . Изобразить угол α .

Решение (рис. 190).

Пусть $SABC$ — данная пирамида,
 $\triangle ABC$ — равносторонний,
 $(SAC) \perp (ABC)$, $[SO]$ — высота пирамиды.

По теореме 2 из 3.1. $[SO] \subset (SAC)$. Проведем $[OD] \perp [AB]$, $D \in [AB]$, тогда $[SD] \perp [AB]$ по теореме о трех перпендикулярах. Линейным углом двугранного угла с ребром AB будет угол SDO . Аналогично, $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла с ребром BC . Заметим, что точки D и K не могут быть выбраны произвольно, поскольку отрезки OD и OK соответственно параллельны медианам, проведенным к сторонам AB и BC .

Далее, из равенства треугольников SDO и SKO следует равенство отрезков OD и OK , поэтому точка O — середина стороны AC .

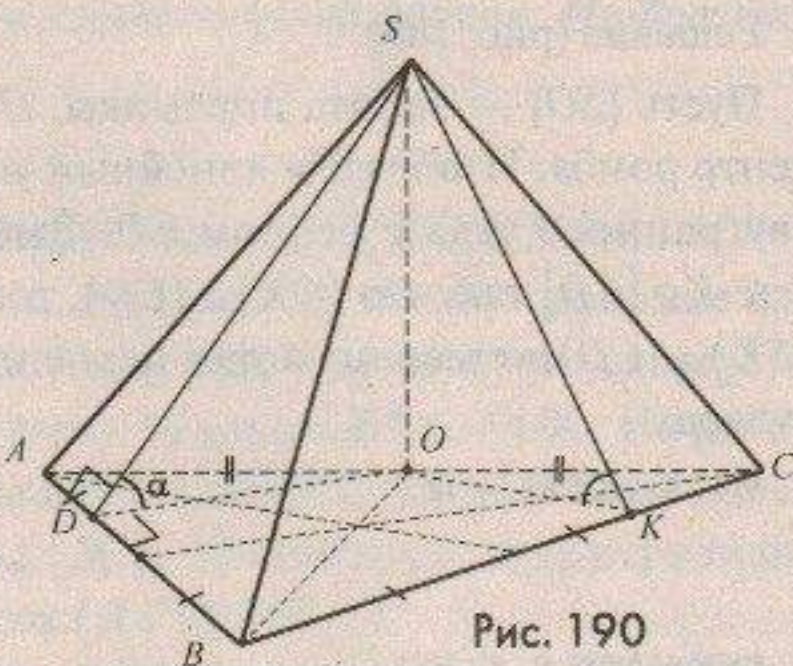


Рис. 190

ПРИМЕР 7. Основание пирамиды — прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие образуют с ним углы α и β . Изобразить углы α и β .

Решение (рис. 191).

Пусть грани SAB и SAC перпендикулярны основанию, тогда по теореме 5 из 3.1 высотой пирамиды будет отрезок SB .

Построим линейный угол двугранного угла с ребром AD .

Имеем: $(AB) \perp (AD)$, (SA) — наклонная к (ABC) . По теореме о трех перпендикулярах $(SA) \perp (AD)$, и тогда $\angle SAB$ — линейный угол двугранного угла с ребром AD и $\angle SAB = \alpha$.

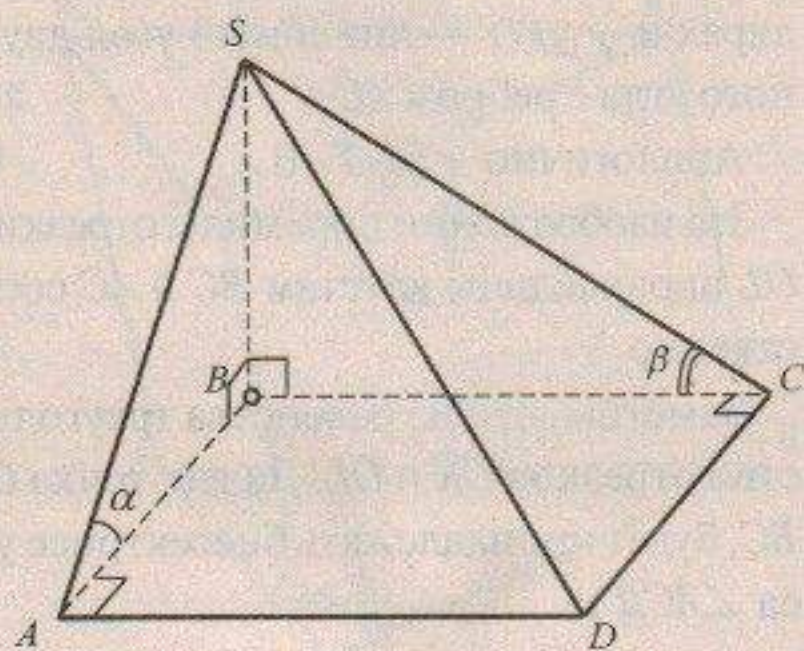


Рис. 191

Аналогично, $\angle SCB$ — линейный угол двугранного угла с ребром CD , $\angle SCB = \beta$.

ПРИМЕР 8. В основании наклонного параллелепипеда — квадрат. Две противоположающиеся боковые грани перпендикулярны основанию, две другие образуют с плоскостью основания угол α . Изобразить угол α .

Решение (рис. 192).

Пусть в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $(AA_1 B_1) \perp (ABC)$ и $(DD_1 C_1) \perp (ABC)$. Проведем $[A_1 H] \perp [AB]$, $H \in [AB]$. По теореме 2 из 3.1 отрезок $A_1 H$ — высота параллелепипеда.

Построим линейный угол двугранного угла с ребром AD . (AA_1) — наклонная к (ABC) , (AB) — ортогональная проекция этой наклонной, причем $(AB) \perp (AD)$ по условию.

По теореме о трех перпендикулярах $(AA_1) \perp (AD)$, и тогда $\angle A_1 AB$ — линейный угол двугранного угла с ребром AD .

Итак, $\angle A_1 AB = \alpha$.

ПРИМЕР 9. Основание пирамиды — ромб. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания; боковые грани, содержащие это ребро, образуют двугранный угол α . Одна из остальных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β . Изобразить углы α и β .

Решение (рис. 193).

Пусть $[SB] \perp (ABC)$, тогда $[SB] \perp [AB]$ и $[SB] \perp [BC]$ по определению перпендикуляра к плоскости. Угол ABC — линейный угол двугранного угла с ребром SB , т.е. $\angle ABC = \alpha$. Построим линейный угол двугранного угла с ребром CD . Проведем $[BK] \perp [CD]$, $K \in [CD]$.

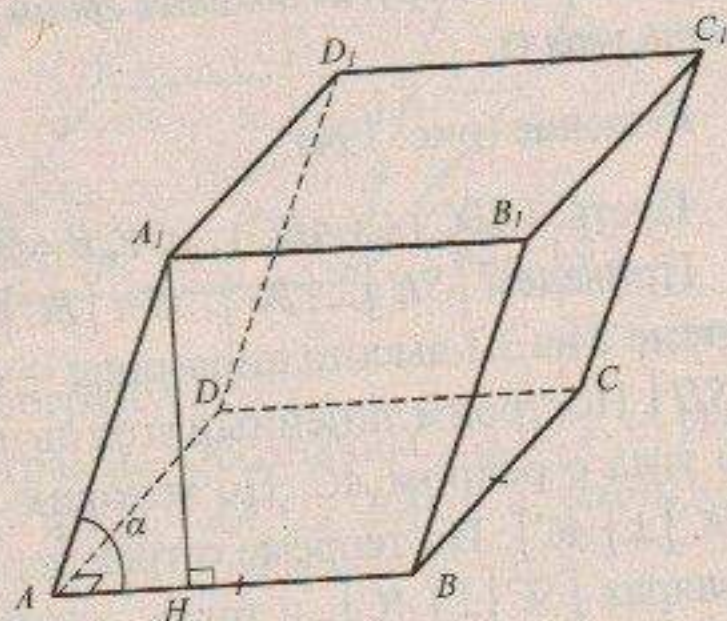


Рис. 192

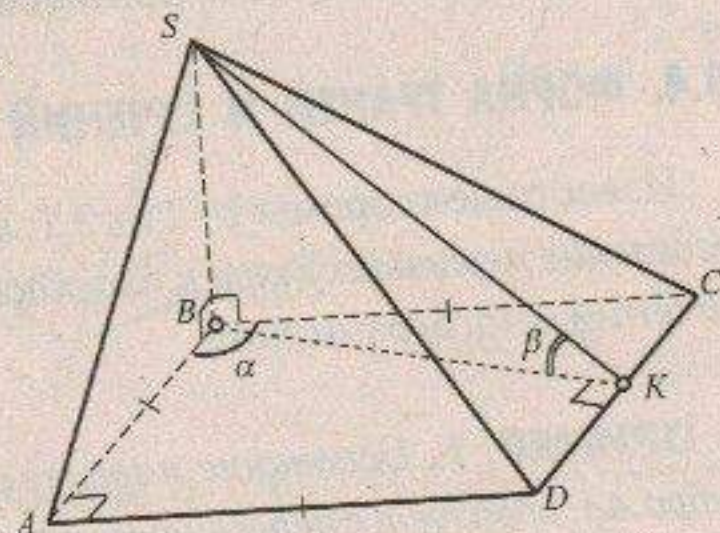


Рис. 193

Аналогично, $\angle SCB$ — линейный угол двугранного угла с ребром CD , $\angle SCB = \beta$.

ПРИМЕР 8. В основании наклонного параллелепипеда — квадрат. Две противоположающиеся боковые грани перпендикулярны основанию, две другие образуют с плоскостью основания угол α . Изобразить угол α .

Решение (рис. 192).

Пусть в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $(AA_1 B_1) \perp (ABC)$ и $(DD_1 C_1) \perp (ABC)$. Проведем $[A_1 H] \perp [AB]$, $H \in [AB]$. По теореме 2 из 3.1 отрезок $A_1 H$ — высота параллелепипеда.

Построим линейный угол двугранного угла с ребром AD . (AA_1) — наклонная к (ABC) , (AB) — ортогональная проекция этой наклонной, причем $(AB) \perp (AD)$ по условию.

По теореме о трех перпендикулярах $(AA_1) \perp (AD)$, и тогда $\angle A_1 AB$ — линейный угол двугранного угла с ребром AD .

Итак, $\angle A_1 AB = \alpha$.

ПРИМЕР 9. Основание пирамиды — ромб. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания; боковые грани, содержащие это ребро, образуют двугранный угол α . Одна из остальных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β . Изобразить углы α и β .

Решение (рис. 193).

Пусть $[SB] \perp (ABC)$, тогда $[SB] \perp [AB]$ и $[SB] \perp [BC]$ по определению перпендикуляра к плоскости. Угол ABC — линейный угол двугранного угла с ребром SB , т.е. $\angle ABC = \alpha$. Построим линейный угол двугранного угла с ребром CD . Проведем $[BK] \perp [CD]$, $K \in [CD]$.

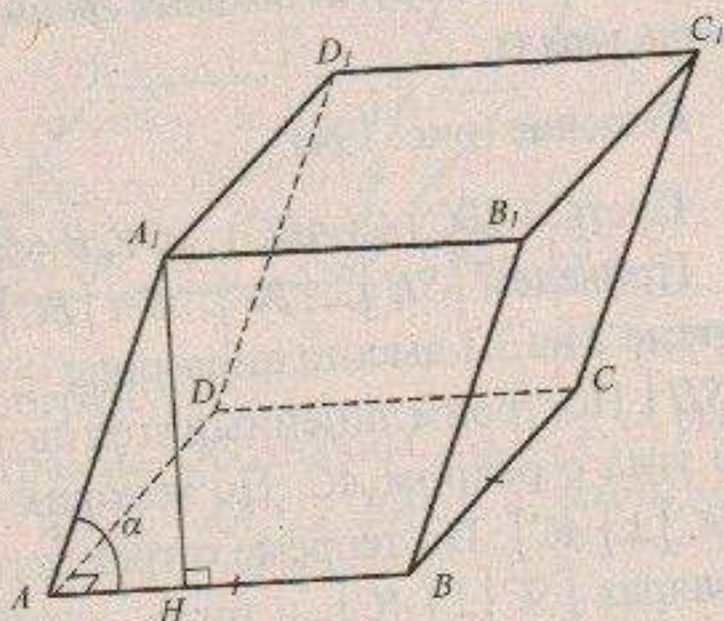


Рис. 192

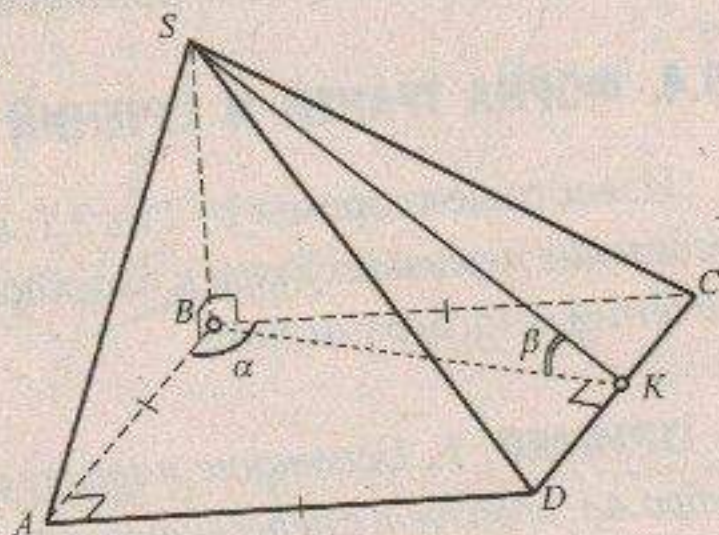


Рис. 193

По теореме о трех перпендикулярах: $[SK] \perp [CD]$, и тогда $\angle SKB$ — линейный угол двугранного угла с ребром CD .

ПРИМЕР 10. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани наклонены к основанию под углом α . Изобразить угол α .

Решение (рис. 194).

Пусть: $(SBC) \perp (ABC)$, $\angle ACB = 90^\circ$

Проведем $[SH] \perp [BC]$, $H \in [BC]$. По теореме 2 из 3.1 высота пирамиды — отрезок $[SH]$. Построим линейный угол двугранного угла с ребром AC . По условию задачи $[BC] \perp [AC]$. По теореме о трех перпендикулярах $[SC] \perp [AC]$, и тогда $\angle SCB$ — линейный угол двугранного угла с ребром AC ; $\angle SCB = \alpha$.

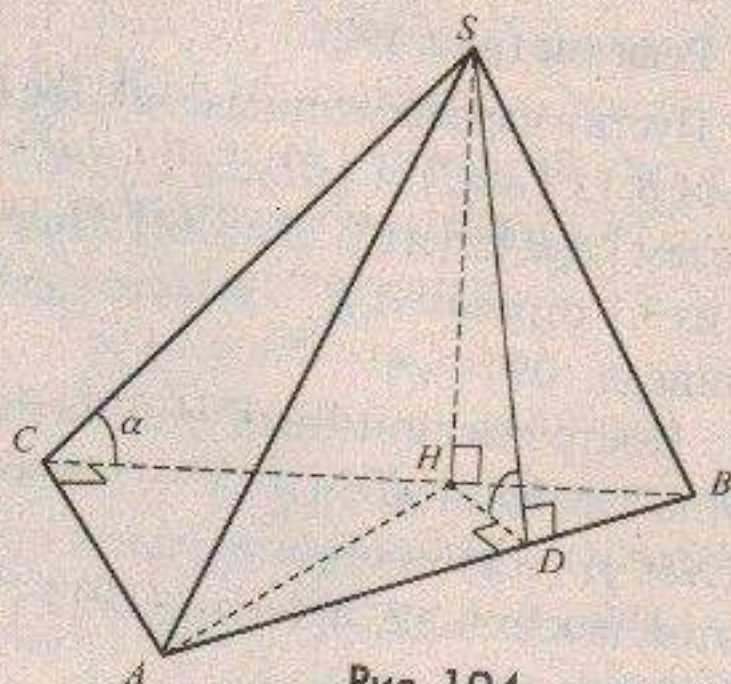


Рис. 194

Построим линейный угол двугранного угла с ребром AB . Проведем $[HD] \perp [AB]$, $D \in [AB]$; тогда $[SD] \perp [AB]$ по теореме о трех перпендикулярах.

Итак, $\angle SDH$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB .

Заметим, что из равенства треугольников SCH и SDH будет следовать равенство отрезков CH и DH , поэтому точка H , равноудаленная от сторон AC и AB треугольника ABC , будет принадлежать биссектрисе AH угла A .

3.4. ФОРМА ГРАНЕЙ И СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАНИКОВ

Известные теоремы 1–2 из 3.1, а также теорема о трех перпендикулярах и определение перпендикуляра к плоскости позволяют установить форму граней или сечений многогранников.

ПРИМЕР 1. Основание параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадрат. Боковое ребро AA_1 образует с пересекающимися его сторонами основания равные острые углы φ . Установить форму диагональных сечений.

Решение.

Пусть $P \in [AC]$ — высота параллелепипеда, $P \in [AC]$ (пример из 3.1) (рис. 195). (AA_1) — наклонная к плоскости ABC , (AC) — ее ортогональная проекция. По теореме о трех перпендикулярах $(AA_1) \perp (BD)$. По свойству параллелепипеда $(AA_1) \parallel (BB_1)$, и тогда $(BB_1) \perp (BD)$. Итак, BB_1D_1D — параллелограмм с прямым углом, т.е. BB_1D_1D — прямоугольник.

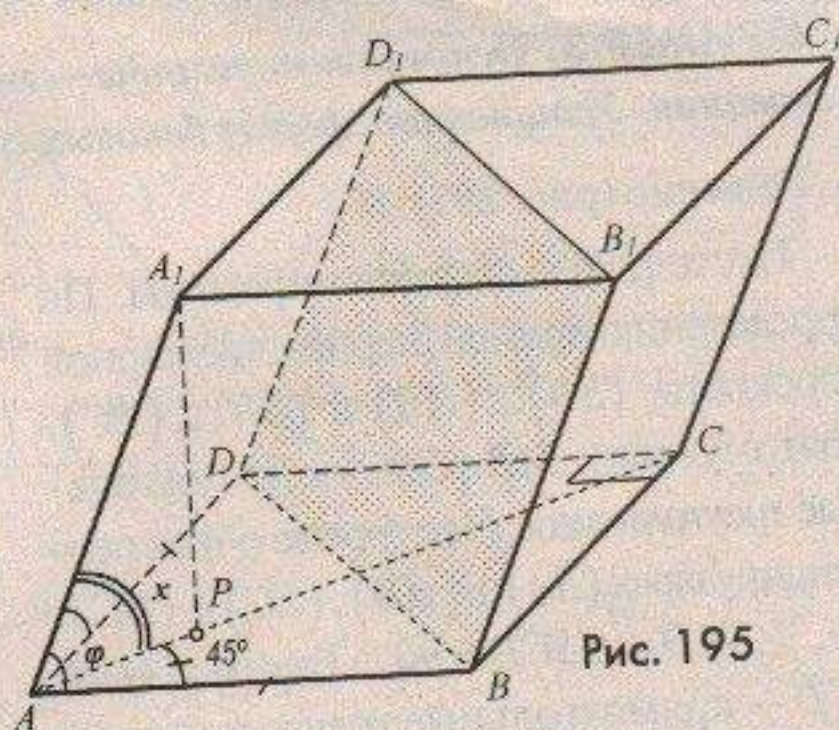


Рис. 195

Диагональное сечение AA_1C_1C — параллелограмм.

Можно вычислить углы этого параллелограмма. Обозначим $\angle A_1AC = x$. Известна формула, связывающая углы AA_1B , AA_1C , BAC , а именно: $\cos \varphi = \cos x \cdot \cos 45^\circ$.

Получим, что $\cos x = \sqrt{2} \cos \varphi$.

ПРИМЕР 2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны. Одна из вершин верхнего основания имеет своей проекцией центр нижнего основания. Установить форму боковых граней.

Решение (рис. 196).

По условию задачи все боковые грани — ромбы. Далее, (AA_1) — наклонная к (ABC) , (AD) — ортогональная проекция (AA_1) на эту плоскость, причем $(AD) \perp (BC)$. По теореме о трех перпендикулярах $(AA_1) \perp (BC)$. По свойству призмы $(AA_1) \parallel (BB_1)$, тогда $(BB_1) \perp (BC)$. Итак, BB_1C_1C — квадрат.

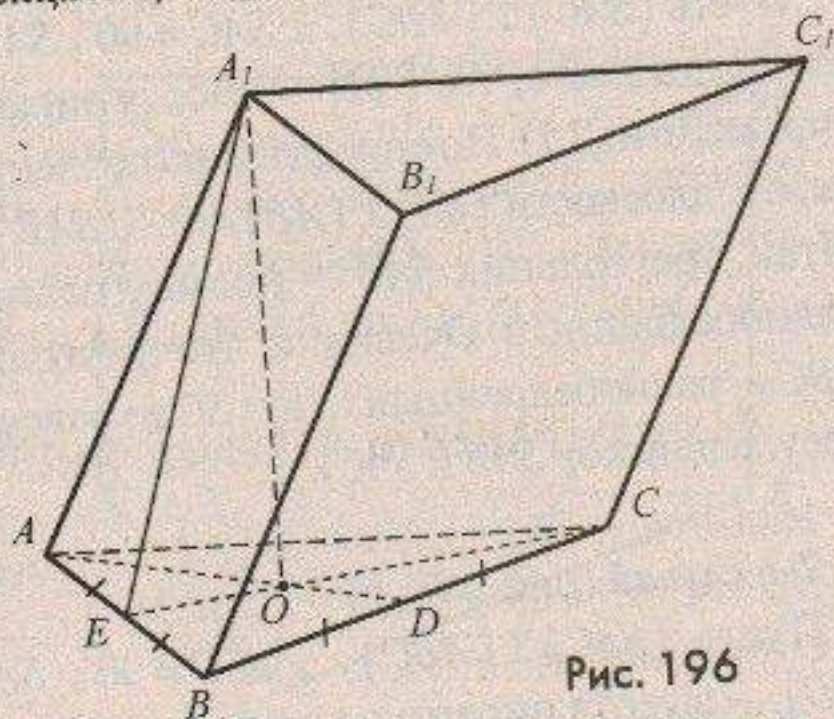


Рис. 196

Для отыскания площадей боковых граней AA_1B_1B и AA_1C_1C необходимо провести высоту в одной из них. По теореме о трех перпендикулярах $(A_1E) \perp (AB)$, т.е. $[A_1E]$ — высота параллелограмма AA_1B_1B .

ПРИМЕР 3. Основание пирамиды — квадрат, высота проходит через вершину основания. Установить форму боковых граней пирамиды.

Решение (рис. 197).

Пусть $[SB]$ — высота пирамиды. По определению прямой, перпендикулярной плоскости, $(SB) \perp (AB)$ и $(SB) \perp (BC)$, поэтому грани SAB и SBC — прямоугольные треугольники. По теореме о трех перпендикулярах $(SA) \perp (AD)$, $(SC) \perp (DC)$, т.е. $\angle SAD = \angle SCD = 90^\circ$. Грани SAD и SCD — прямоугольные треугольники.

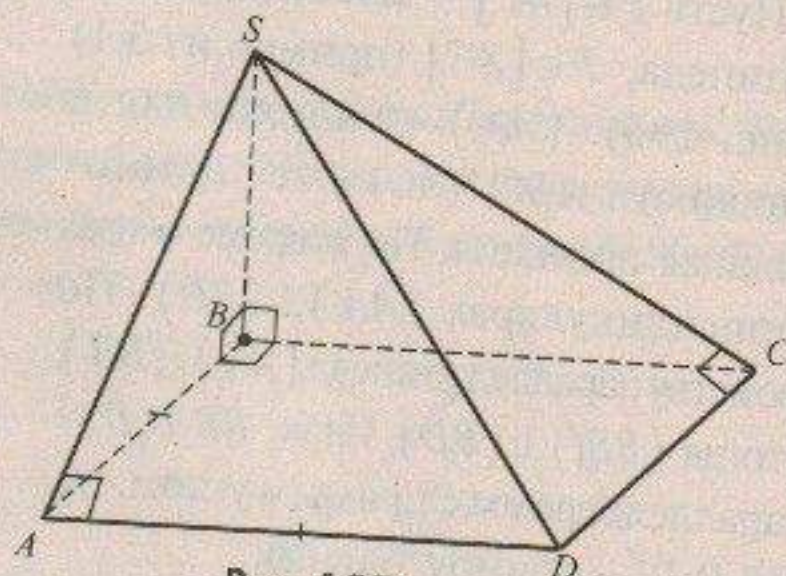


Рис. 197

ПРИМЕР 4. Основание пирамиды — правильный треугольник. Одна из боковых граней — равнобедренный прямоугольный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Установить форму других боковых граней.

Решение.

Рассмотрим два случая.

1-й случай (рис. 198, а)

Пусть $(SAC) \perp (ABC)$, $\angle SAC = 90^\circ$, $SA = AC$. Ранее доказано, что $[SA]$ — высота пирамиды (пример 6 из 3.1). По определению перпендикуляра к плоскости $(SA) \perp (AB)$, т.е. $\angle SAB = 90^\circ$. Итак, треугольник SAB — прямоугольный и равнобедренный. Очевидно, что треугольник SBC — равнобедренный ($SB = SC$ из равенства треугольников SAB и SAC).

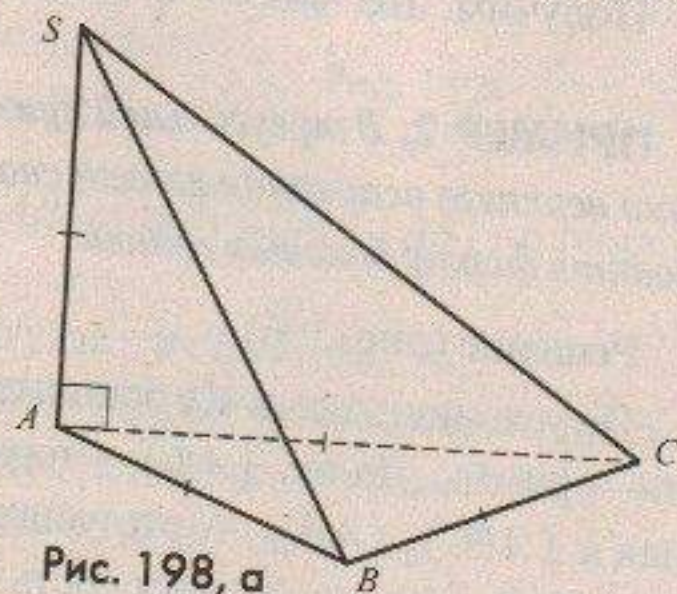


Рис. 198, а

2-й случай (рис. 198, б)

Пусть $(SAC) \perp (ABC)$, $\angle ASC = 90^\circ$, $SA = SC$. Если O — середина $[AC]$, то $[SO]$ — высота пирамиды по теореме 2 из 3.1. Докажем, что $\triangle SAB$ — равнобедренный. Действительно, $\triangle OAB = \triangle OSB$ ($\angle AOB = \angle SOB = 90^\circ$, $AO = SO$, OB — общий), поэтому $AB = SB$. Аналогично доказывается, что $SB = BC$, т.е. $\triangle SBC$ — равнобедренный.

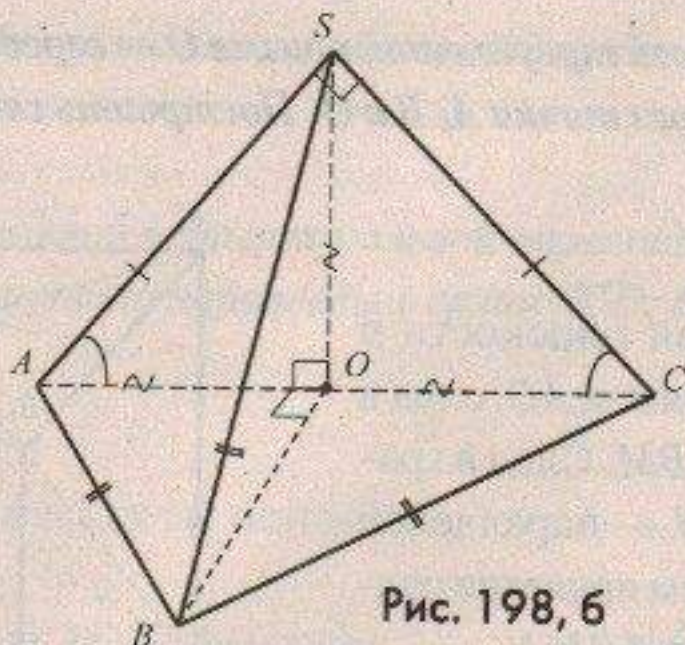


Рис. 198, б

Рассмотрим некоторые другие возможности определения формы сечений многогранников.

Теорема 1: «Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то линия пересечения параллельна этой прямой».

ПРИМЕР 5. В правильной треугольной призме проведено сечение плоскостью через точки M , N и P . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 199).

Найдем след $[PQ]$ секущей плоскости в грани AA_1B_1B . Секущая плоскость проходит через прямую MN , параллельную плоскости AA_1B_1 , и пересекает ее по прямой PQ . По теореме 1 прямые MN и PQ параллельны. Из равенства треугольников APM и QBN следует равенство отрезков PM и QN . Сечение $MNPQ$ — равнобедренная трапеция.

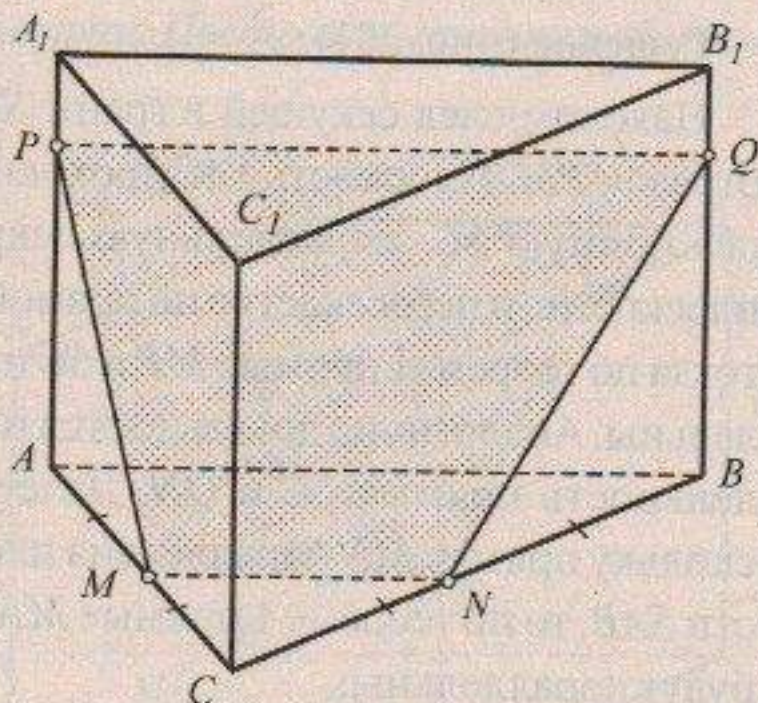


Рис. 199

ПРИМЕР 6. В правильной треугольной призме O — середина оси O_1O_2 . Проведено сечение плоскостью через точки A , B и O . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 200).

Находим след секущей плоскости в плоскости AA_1O — это прямая AD ; след в грани CC_1B_1B — отрезок BM . След в грани A_1B_1C — отрезок MN — параллелен AB по теореме 1. Сечением является равнобедренная трапеция $ABMN$.

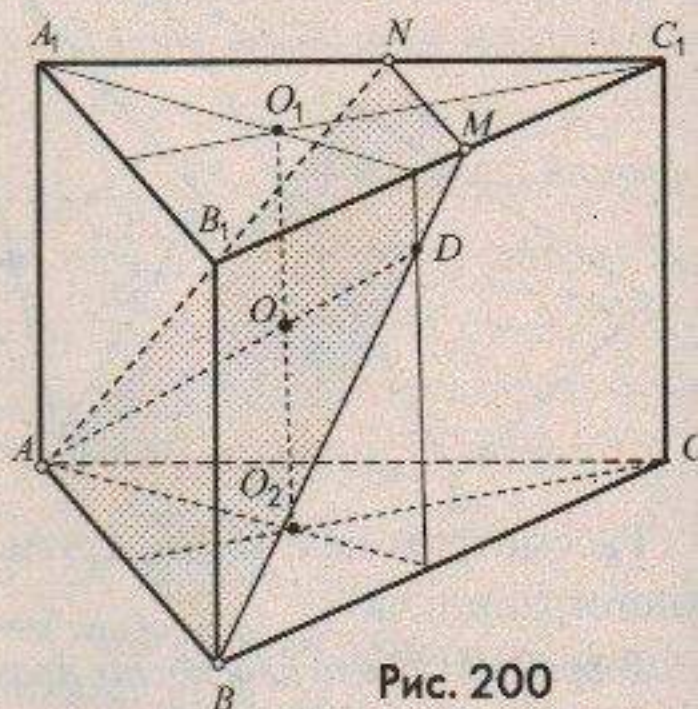


Рис. 200

ПРИМЕР 7. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение плоскостью через точки N и M параллельно ребру SC . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 201).

Находим след секущей в грани SAC — отрезок PM . Плоскость SAC проходит через прямую SC , параллельную секущей плоскости, и пересекает ее по прямой MP , тогда по теореме 1 прямые MP и SC параллельны. Аналогично доказывается параллельность прямых SC и QN . Далее, поскольку прямая MN параллельна плоскости SAB , то по теореме 1 прямые MN и PQ будут параллельны.

Итак, $MNQP$ — параллелограмм. Более того, поскольку прямая SC перпендикулярна AB (по теореме о трех перпендикулярах), то перпендикулярными будут прямые MN и PM . Итак, $MNQP$ — прямоугольник.

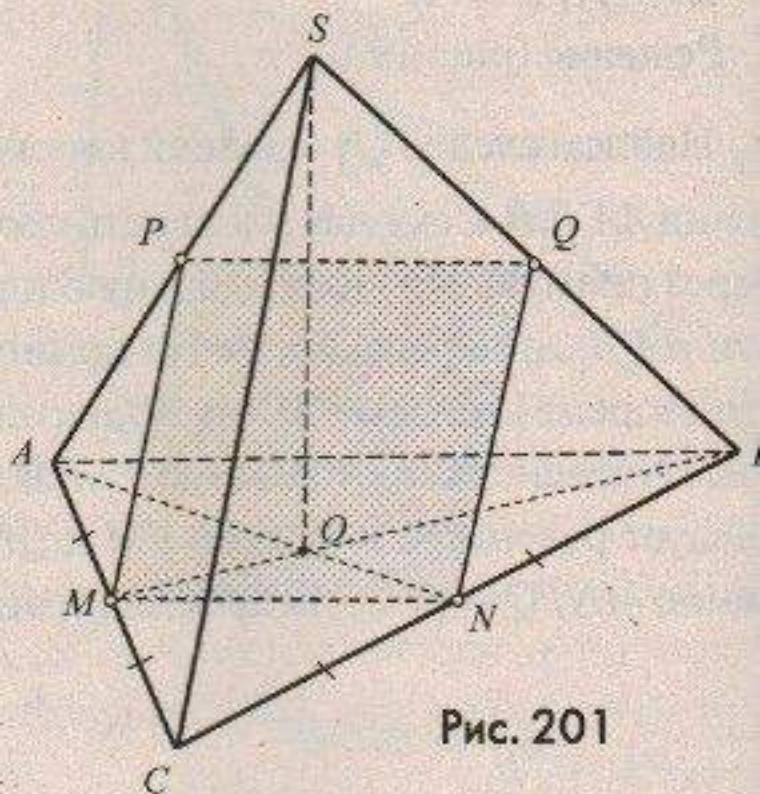


Рис. 201

Теорема 2: «Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны».

ПРИМЕР 8. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение плоскостью через центр основания параллельно грани SCD . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 202).

Найдем след на плоскости основания — отрезок MN .

По теореме 2 прямые MN и CD параллельны. Аналогично, прямые LM и SD параллельны как линии пересечения плоскостью SAD двух параллельных плоскостей — секущей и плоскости SCD . По теореме 1 прямые MN и LK параллельны. Сечение $MNKL$ — равнобедренная трапеция.

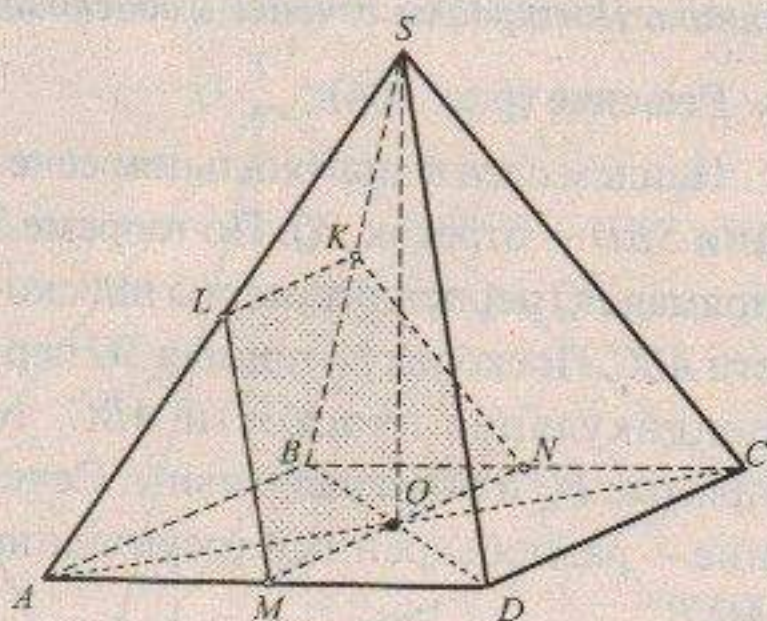


Рис. 202

ПРИМЕР 9. В правильной четырехугольной призме проведено сечение плоскостью через точки N , M и O — центр ее симметрии. Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 203).

След секущей плоскости в диагональном сечении DD_1B_1B — отрезок SP — параллелен прямой MN по теореме 1. Отрезок PQ — след в грани DD_1C_1C — параллелен SM по теореме 2. Аналогично, параллельны и прямые RQ и MN . Итак, сечение $MNPQRS$ — правильный шестиугольник.

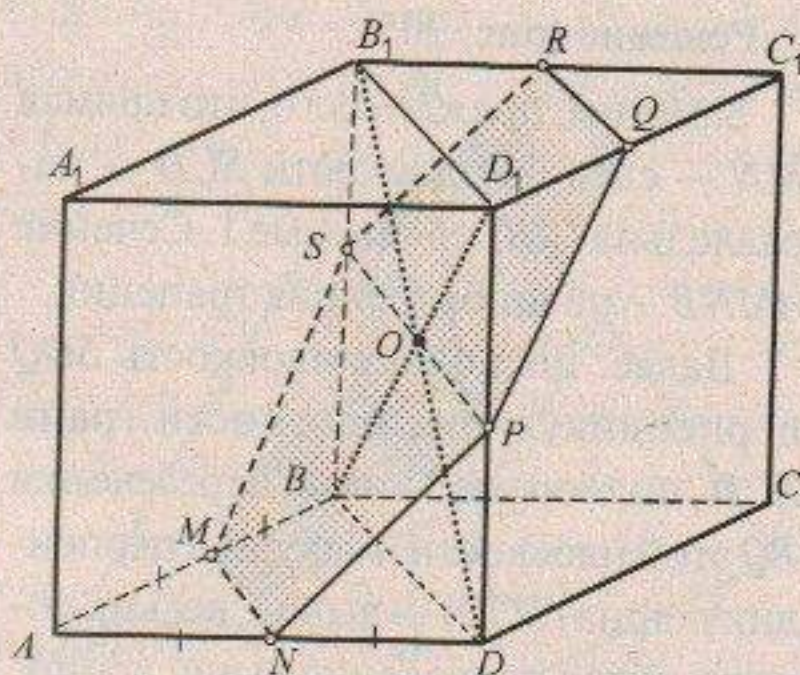


Рис. 203

Теорема 3: «Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то линия их пересечения перпендикулярна этой плоскости».

ПРИМЕР 10. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение плоскостью через середины M и N смежных сторон основания перпендикулярно основанию. Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 204).

Найдем след в диагональном сечении SBD — отрезок PQ . По теореме 3 прямая PQ перпендикулярна плоскости ABC . Поскольку и прямая SO перпендикулярна плоскости ABC , то прямые PQ и SO параллельны. Сечение — равнобедренный треугольник MNP .

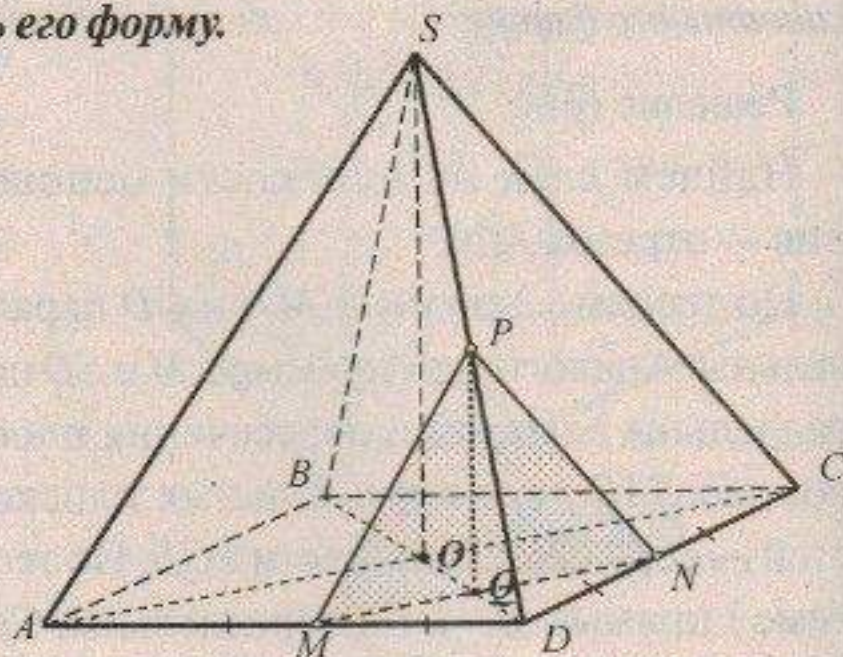


Рис. 204

ПРИМЕР 11. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение плоскостью через вершины A и B основания перпендикулярно грани SCD . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 205).

Заместим, прежде всего, что прямая MN — след на плоскости SCD — параллельна (AB) по теореме 1. Сечение $AMNB$ — равнобедренная трапеция.

Далее, поскольку плоскость SOQ перпендикулярна плоскости грани SCD , по теореме 3 линия пересечения PQ этой плоскости и секущей перпендикулярна (SCD) — вывод, весьма полезный для проведения вычислений.

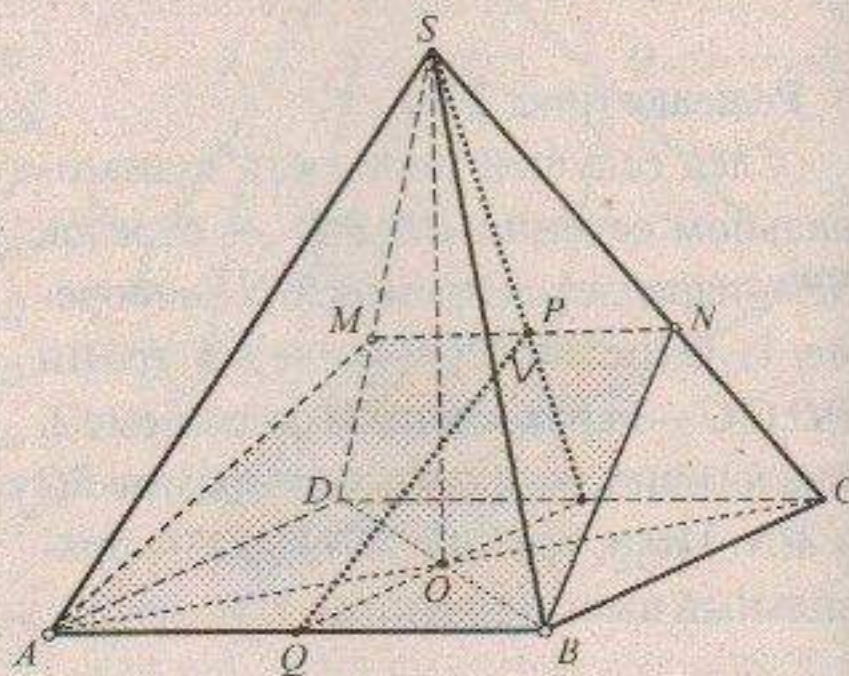


Рис. 205

Определение. «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости».

ПРИМЕР 12. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение плоскостью через вершины A и B основания перпендикулярно ребру SC . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 206).

След BM в грани SBC перпендикулярен прямой SC по определению. Этим же свойством будут обладать и прямые KM и AM (может пригодиться при решении задачи на вычисление).

Сечение — равнобедренный треугольник AMB .

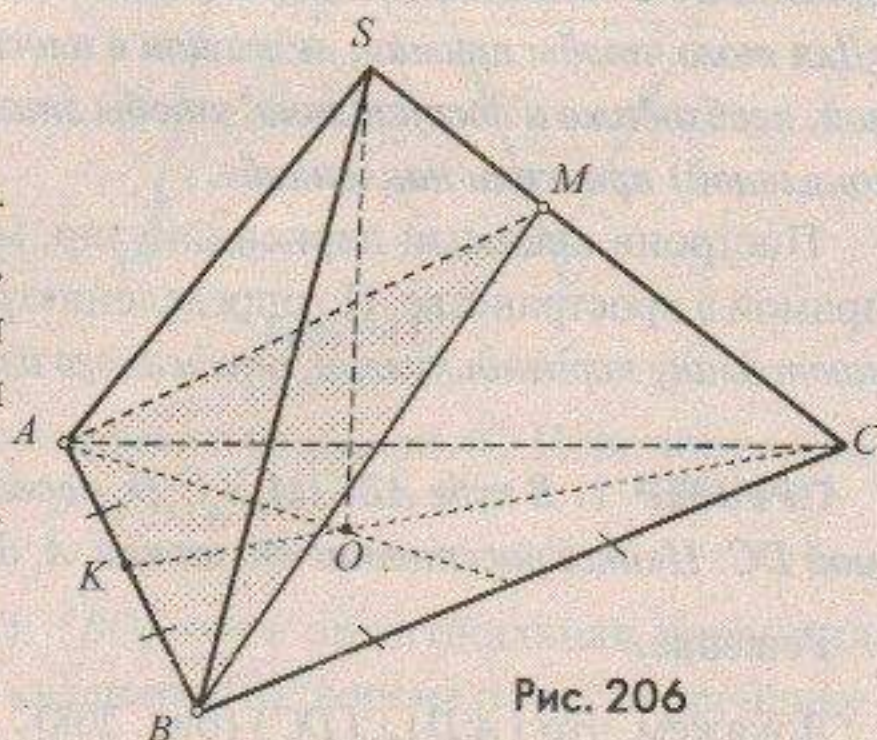


Рис. 206

ПРИМЕР 13. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение плоскостью через вершину A основания перпендикулярно ребру SC . Построить сечение и обосновать его форму.

Решение (рис. 207).

Найдем следы в гранях SCD , SCB и диагональном сечении SAC . По определению прямая SC перпендикулярна прямым ML , KL и AL . Легко доказать равенство отрезков LM и KL , а также AK и AM . Сечением является четырехугольник $AKLM$ с равными смежными сторонами и перпендикулярными диагоналями.

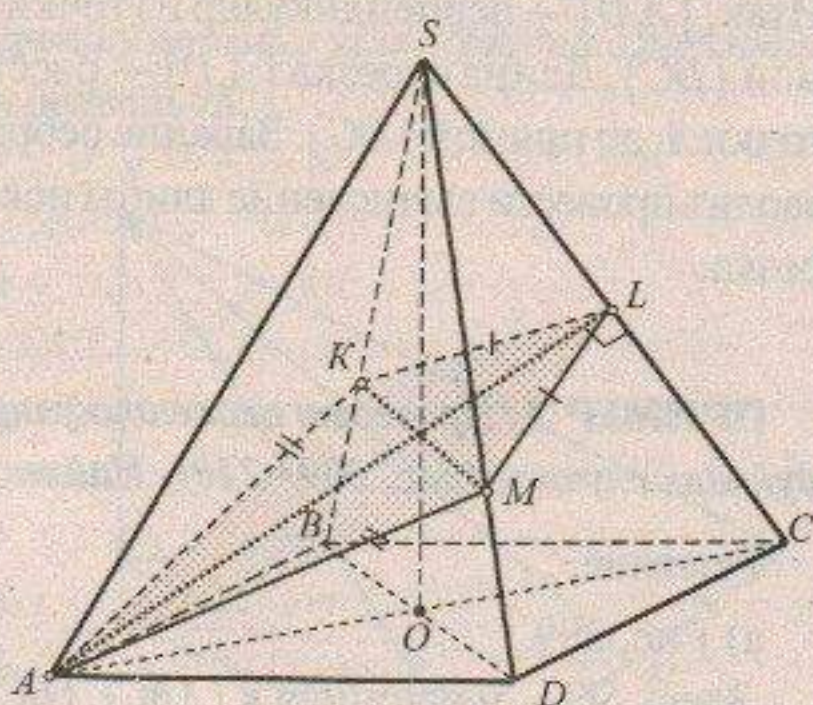


Рис. 207

3.5. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ИЗ ТОЧКИ К ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.5.1. Перпендикуляр из точки к прямой в пространстве

Построение в пространстве перпендикуляра из точки к прямой может быть проведено с использованием обобщенной теоремы о трех перпендикулярах: «Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна (ортогональной) проекции наклонной».

Построив искомый перпендикуляр, можно найти расстояние от точки до прямой в пространстве. По определению расстоянием от точки до прямой называют длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту прямую.

ПРИМЕР 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ провести перпендикуляр из точки A_1 к прямой DC . Найти расстояние от точки A_1 до прямой DC .

Решение.

Докажем, что $(A_1 D) \perp (DC)$ (рис. 208).

Имеем: $(A_1 D)$ — наклонная к (ABC) , (AD) — ортогональная проекция, причем $(AD) \perp (DC)$. По теореме о трех перпендикулярах $(A_1 D) \perp (DC)$. Итак, $[A_1 D]$ — перпендикуляр из точки A_1 к прямой (DC) . Длина отрезка $[A_1 D]$ — расстояние от точки A_1 до прямой (DC) . Задание ребра куба позволит провести вычисление длины искомого отрезка.

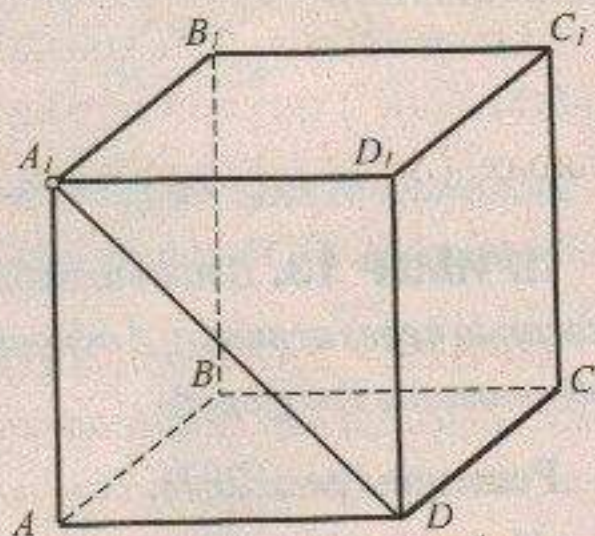


Рис. 208

ПРИМЕР 2. Провести перпендикуляр из точки S к прямой AC в каждом из следующих случаев (рис. 209–210). Найти расстояние от точки S до прямой AC .

Решение.

а) Рис. 209.

Здесь SC — наклонная к (ABC) , (BC) — ее ортогональная проекция, причем $(BC) \perp (CA)$ по условию. По теореме о трех перпендикулярах $(SC) \perp (CA)$, по-

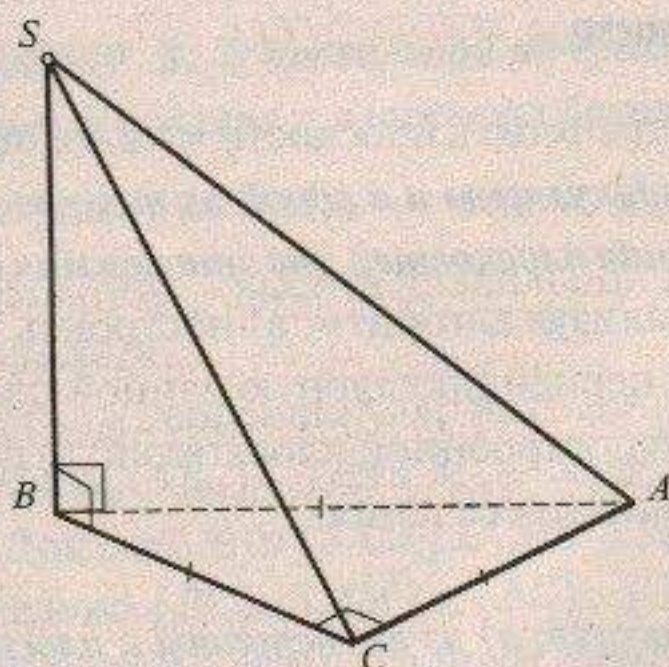


Рис. 209

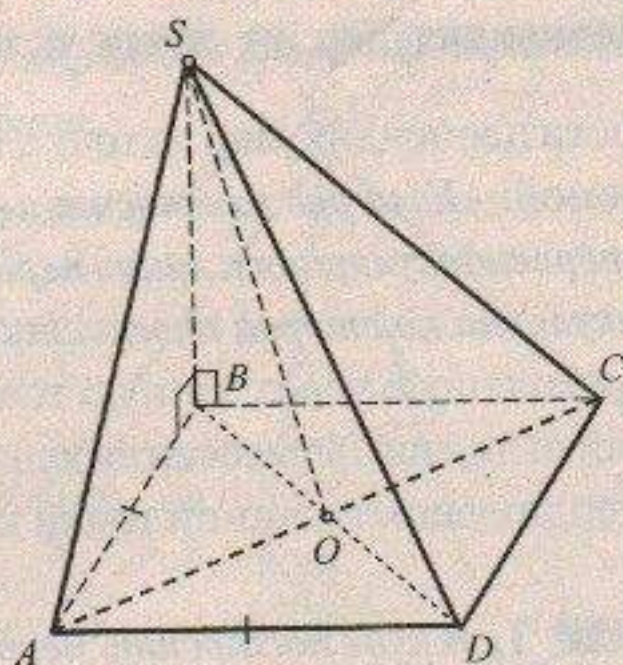


Рис. 210

этому отрезок $[SC]$ — перпендикуляр из точки S к прямой AC . Искомое расстояние равно длине отрезка SC .

б) Рис. 210.

Здесь (SO) — наклонная к (ABC) , (BO) — ее ортогональная проекция, $(BO) \perp (AC)$ по свойству диагоналей квадрата. По теореме о трех перпендикулярах $(SO) \perp (AC)$, поэтому отрезок $[SO]$ — перпендикуляр из точки S к прямой AC . Искомое расстояние равно длине отрезка SO .

ПРИМЕР 3. Основание пирамиды — прямоугольный равнобедренный треугольник. Высота пирамиды проходит через вершину прямого угла. Найдите расстояние от вершины пирамиды до гипотенузы основания.

Решение.

Пусть M — середина $[AB]$, тогда $(CM) \perp (AB)$ по свойству медианы равнобедренного треугольника. По теореме о трех перпендикулярах $(SM) \perp (AB)$, поэтому отрезок $[SM]$ — перпендикуляр из точки S к прямой AB . Длина отрезка SM — расстояние от точки S до прямой AB .

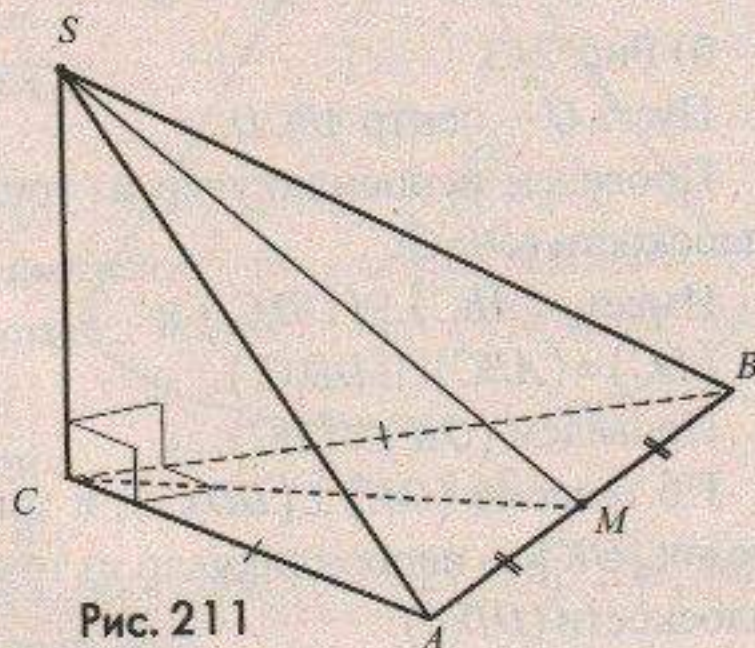


Рис. 211

3.5.2. Перпендикуляр из точки к плоскости

Провести перпендикуляр из точки пространства к плоскости можно, пользуясь теоремой: «Если две плоскости перпендикулярны и в одной из них проведена прямая, перпендикулярная к линии пересечения плоскостей, то эта прямая будет перпендикулярна ко второй плоскости», реализуя алгоритм: а) построить плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной плоскости; б) найти линию пересечения данной и построенной плоскостей; в) провести перпендикуляр из данной точки к линии пересечения.

ПРИМЕР 1. В кубе построить перпендикуляр: а) из его вершины к плоскости диагонального сечения; б) из центра основания к плоскости боковой грани.

Решение.

а) Рис. 212.

Проведем перпендикуляр из точки D к плоскости (AA_1C_1) .

Имеем: $(ADC) \perp (AA_1C_1)$ и
 $(AC) = (ADC) \cap (AA_1C_1)$.

По свойству диагоналей квадрата $(DO) \perp (AC)$.

По теореме $(DO) \perp (AA_1C_1)$.

Итак, отрезок $[DO]$ — перпендикуляр из точки D к плоскости (AA_1C_1) .

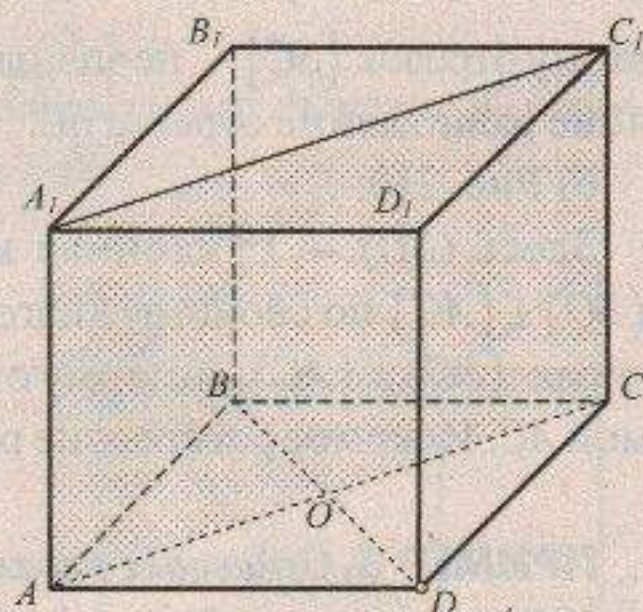


Рис. 212

б) Рис. 213.

Пусть O — центр $ABCD$.

Проведем перпендикуляр из точки O к плоскости (DD_1C_1) .

Имеем: $(ABC) \perp (DD_1C_1)$ и
 $(DC) = (ABC) \cap (DD_1C_1)$.

Проведем $(OK) \perp (DC)$.

По теореме $(OK) \perp (DD_1C_1)$, и тогда отрезок $[OK]$ — перпендикуляр из точки O к плоскости (DD_1C_1) .

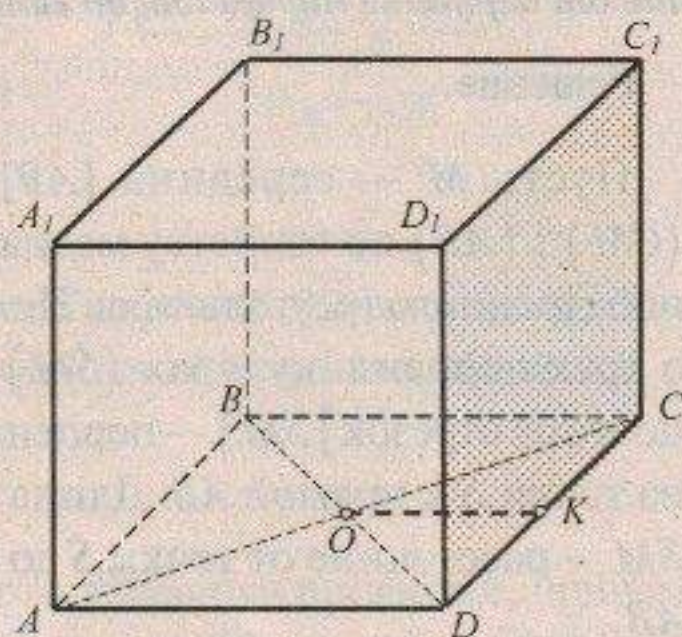


Рис. 213

ПРИМЕР 2. В правильной треугольной пирамиде провести перпендикуляр из вершины основания к плоскости боковой грани.

Решение (рис. 214).

Пусть $[SO]$ — высота правильной пирамиды $SABC$.

Опустим перпендикуляр из точки A на плоскость (SBC) . Пусть M — середина $[BC]$. Докажем, что $(SAM) \perp (SBC)$. Действительно, $(BC) \perp (AM)$ и $(BC) \perp (SM)$ (по свойству медианы равнобедренного треугольника), поэтому $(BC) \perp (SAM)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), и тогда $(SBC) \perp (SAM)$ (по признаку перпендикулярности плоскостей). Далее, $(SM) = (SAM) \cap (SBC)$. Проведем $(AK) \perp (SM)$, $K \in [SM]$, и тогда отрезок $[AK]$ — искомый перпендикуляр.

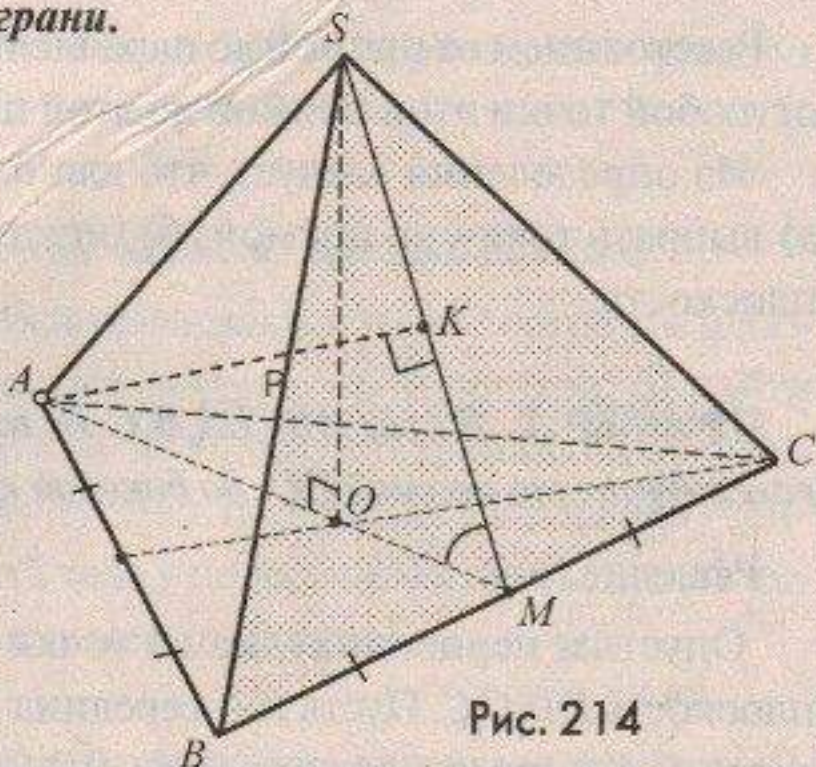


Рис. 214

ПРИМЕР 3. В конусе проведена плоскость, пересекающая его основание и содержащая вершину. Провести перпендикуляр из центра основания конуса к плоскости сечения.

Решение (рис. 215).

Пусть $\triangle SAB$ — сечение конуса данной плоскостью. Опустим перпендикуляр из точки O — центра основания — на плоскость SAB .

Пусть M — середина отрезка $[AB]$. По свойству диаметра, содержащего середину хорды, $(AB) \perp (OM)$. По свойству медианы равнобедренного треугольника $(AB) \perp (SM)$. Тогда $(AB) \perp (SOM)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Далее, по признаку перпендикулярности плоскостей, проведем $(OK) \perp (SM)$, $K \in [SM]$, и тогда отрезок $[OK]$ — искомый перпендикуляр.

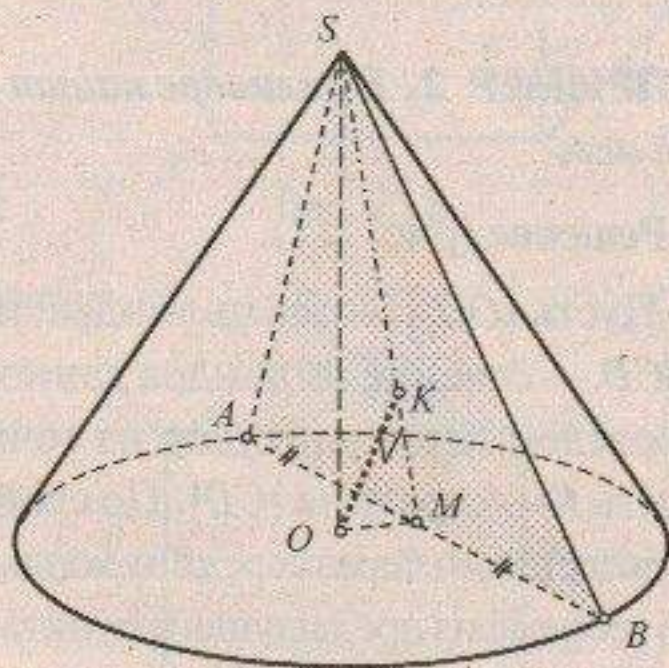


Рис. 215

3.5.3. Расстояние от прямой до плоскости

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называют расстояние от любой точки этой прямой до этой плоскости.

Из определения следует, что для отыскания искомого расстояния следует:
а) выбрать точку на прямой; б) опустить перпендикуляр из точки на данную плоскость.

ПРИМЕР 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки O и O_1 — центры оснований. Найти расстояние от прямой OO_1 до боковой грани.

Решение (рис. 216).

Опустим перпендикуляр из точки O_1 на плоскость $DD_1 C_1 C$. Пусть K — середина $[C_1 D_1]$, тогда $O_1 K$ — расстояние от O_1 до $DD_1 C_1 C$ (пример 1 из предыдущего пункта).

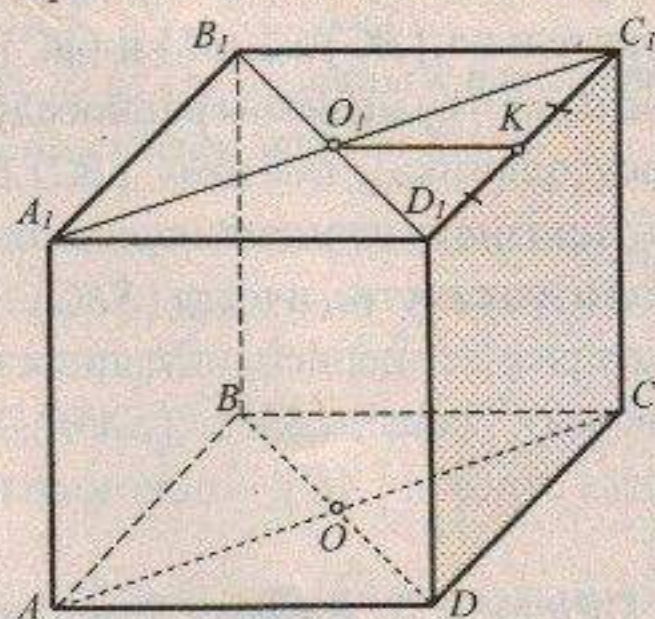


Рис. 216

ПРИМЕР 2. В цилиндре найти расстояние от оси до плоскости, параллельной оси.

Решение (рис. 217).

Пусть $[OO_1]$ — ось цилиндра, прямоугольник $ABCD$ — сечение цилиндра данной плоскостью. Проведем перпендикуляр из точки O на (ABC) . Пусть K — середина $[CD]$. По свойству диаметра, проведенного через середину хорды, $(OK) \perp (CD)$. По теореме из предыдущего пункта $(OK) \perp (ABC)$, и тогда OK — искомое расстояние.

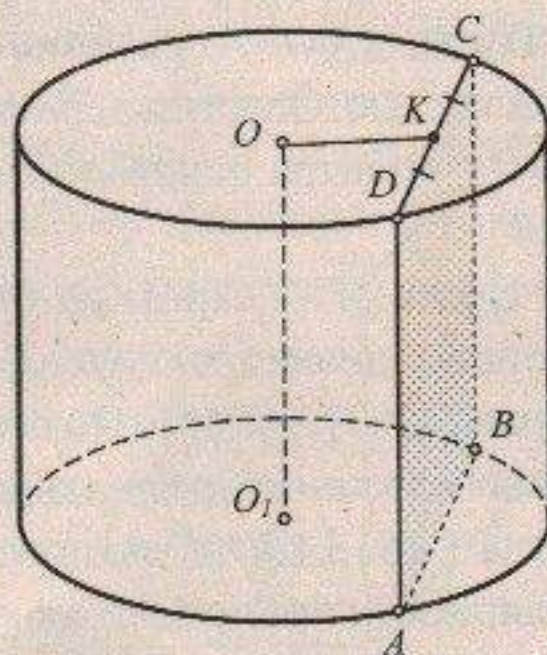


Рис. 217

3.6. ОБЩИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Рассмотрим два основных способа построения общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых.

I способ

(с использованием плоскости, параллельной одной из данных прямых)

Построения можно провести в такой последовательности: а) построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй прямой; б) найти (ортогональную) проекцию второй прямой на эту плоскость; в) найти точку пересечения проекции и первой прямой; г) опустить перпендикуляр из полученной точки на вторую прямую и обозначить точку пересечения; д) выделить искомый отрезок (соединяющий две полученные в пунктах в) и г) точки).

ПРИМЕР 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построить общий перпендикуляр прямых DD_1 и AB_1 .

Решение.

Строим (рис. 218):

- $(AA_1 B_1) \parallel (DD_1)$;
- (AA_1) — ортогональная проекция (DD_1) на плоскость $(AA_1 B_1)$;
- $A = (AA_1) \cap (AB_1)$;
- $(AD) \perp (DD_1)$, $D = (AD) \cap (DD_1)$;
- $[AD]$ — искомый общий перпендикуляр.

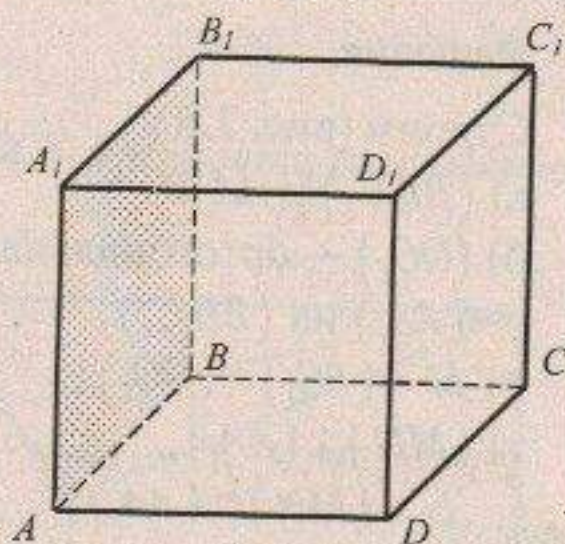


Рис. 218

ПРИМЕР 2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построить общий перпендикуляр прямых AA_1 и BD_1 .

Решение.

Строим (рис. 219):

- $(BDD_1) \parallel (AA_1)$;
- (OO_1) — ортогональная проекция (AA_1) на (BDD_1) ;
- $M = (BD_1) \cap (OO_1)$;
- $(MN) \perp (AA_1)$, $N = (MN) \cap (AA_1)$;
- $[MN]$ — общий перпендикуляр прямых AA_1 и BD_1 .

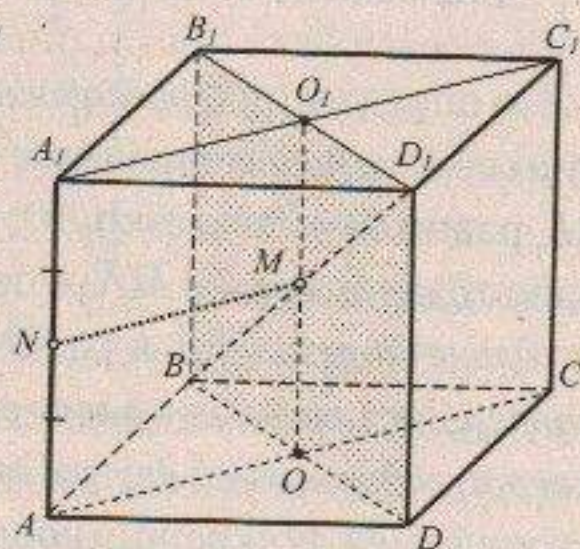


Рис. 219

ПРИМЕР 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние между прямыми $A_1 D_1$ и $B_1 D$.

Решение (рис. 222).

Прямая $(A_1 D_1)$ параллельна плоскости диагонального сечения $AB_1 C_1 D$, поэтому искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой $A_1 D_1$ на плоскость $AB_1 C_1 D$. Опустим перпендикуляр из точки D_1 . Пусть O — центр грани $DD_1 C_1 C$, тогда прямая $D_1 O$ перпендикулярна плоскости $AB_1 C_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Итак, расстояние между скрещивающимися прямыми $A_1 D_1$ и $B_1 D$ равно длине отрезка $D_1 O$.

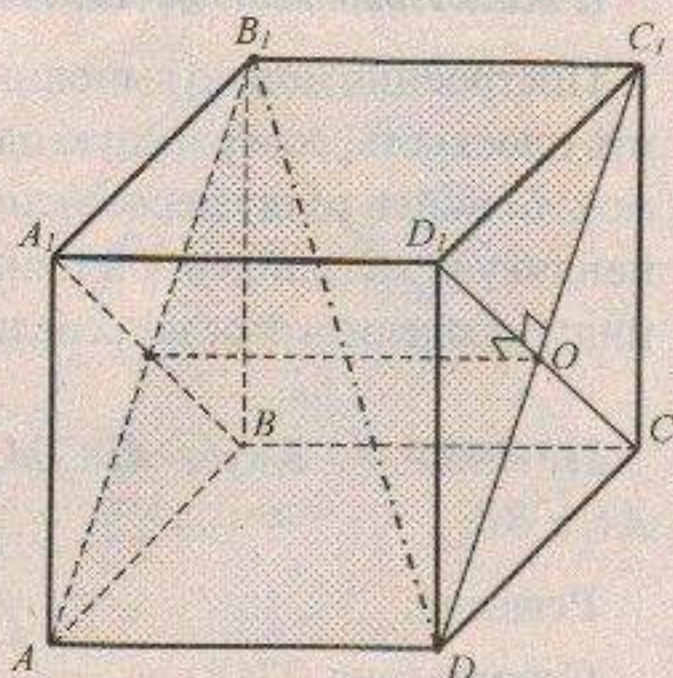


Рис. 222

ПРИМЕР 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ найти расстояние между скрещивающимися прямыми CC_1 и $A_1 B$.

Решение (рис. 223).

Прямая (CC_1) параллельна плоскости $(AA_1 B_1)$, поэтому для нахождения искомого расстояния опустим перпендикуляр из точки C_1 на $(AA_1 B_1)$.

Пусть M — середина $[A_1 B_1]$, тогда $(C_1 M) \perp (AA_1 B_1)$ по теореме из предыдущего пункта. Итак, расстояние между (CC_1) и $(A_1 B)$ равно длине отрезка CM_1 .

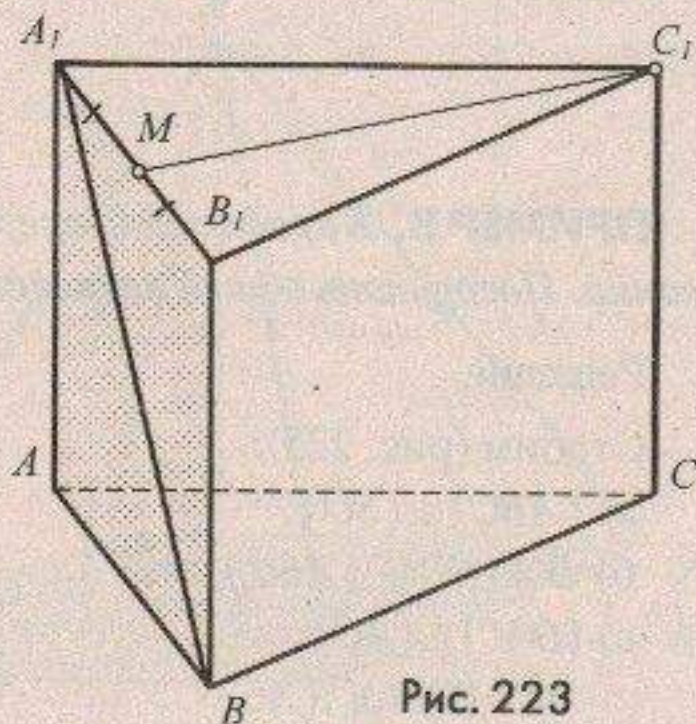


Рис. 223

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми возможно и без построения общего перпендикуляра этих прямых, если только может быть построена плоскость, содержащая одну из прямых и параллельная другой.

ПРИМЕР 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние между прямыми $A_1 D_1$ и $B_1 D$.

Решение (рис. 222).

Прямая $(A_1 D_1)$ параллельна плоскости диагонального сечения $AB_1 C_1 D$, поэтому искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой $A_1 D_1$ на плоскость $AB_1 C_1 D$. Опустим перпендикуляр из точки D_1 . Пусть O — центр грани $DD_1 C_1 C$, тогда прямая $D_1 O$ перпендикулярна плоскости $AB_1 C_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Итак, расстояние между скрещивающимися прямыми $A_1 D_1$ и $B_1 D$ равно длине отрезка $D_1 O$.

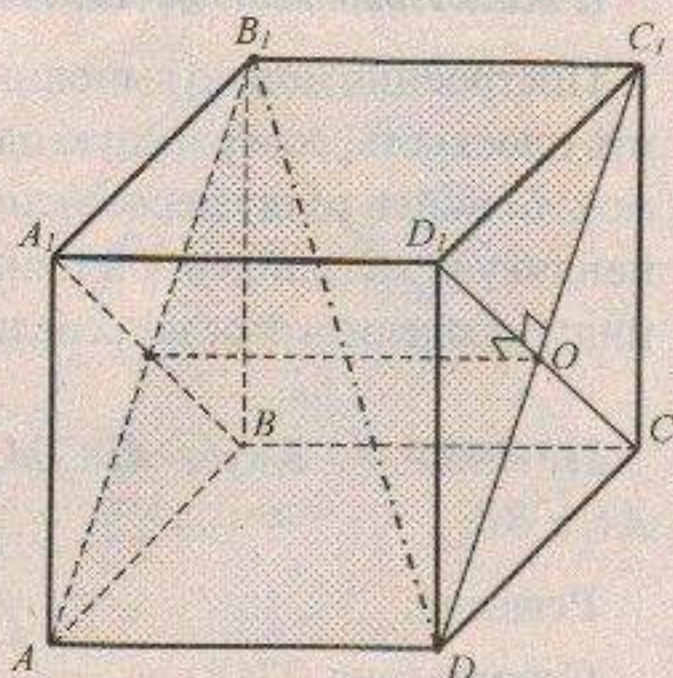


Рис. 222

ПРИМЕР 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ найти расстояние между скрещивающимися прямыми CC_1 и $A_1 B$.

Решение (рис. 223).

Прямая (CC_1) параллельна плоскости $(AA_1 B_1)$, поэтому для нахождения искомого расстояния опустим перпендикуляр из точки C_1 на $(AA_1 B_1)$.

Пусть M — середина $[A_1 B_1]$, тогда $(C_1 M) \perp (AA_1 B_1)$ по теореме из предыдущего пункта. Итак, расстояние между (CC_1) и $(A_1 B)$ равно длине отрезка CM_1 .

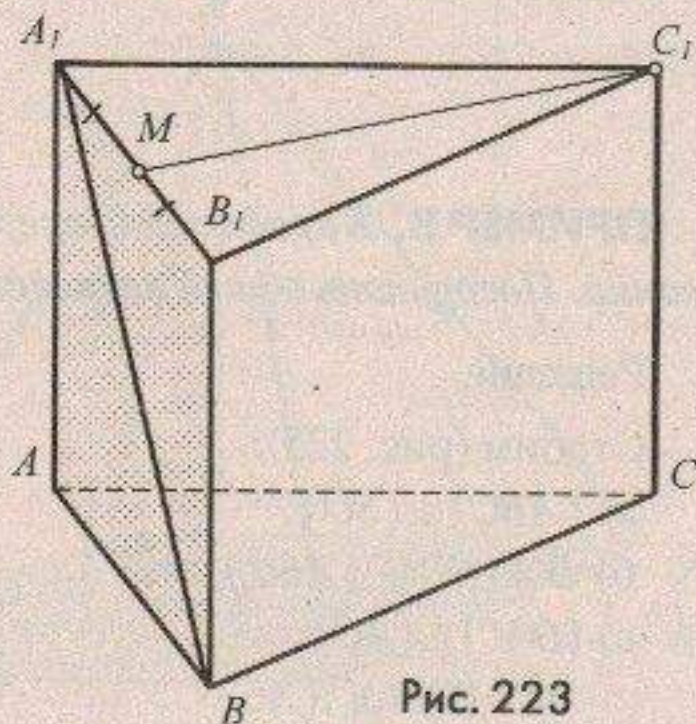


Рис. 223

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми возможно и без построения общего перпендикуляра этих прямых, если только может быть построена плоскость, содержащая одну из прямых и параллельная другой.

II способ

(с использованием плоскости, перпендикулярной одной из прямых)

Построения можно выполнять в следующей последовательности: а) построить плоскость, содержащую одну из прямых и перпендикулярную другой прямой; б) найти точку пересечения второй прямой и плоскости; в) опустить перпендикуляр из найденной точки на первую прямую и отметить точку пересечения; г) выделить отрезок, соединяющий полученные в пунктах б) и в) точки.

ПРИМЕР 7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построить общий перпендикуляр прямым AA_1 и BD .

Решение.

Строим (рис. 224):

- а) $(ABC) \perp (AA_1)$;
- б) $A = (AA_1) \cap (ABC)$;
- в) $(AO) \perp (BD)$, $O = (AO) \cap (BD)$;
- г) $[AO]$ — общий перпендикуляр (AA_1) и (BD) .

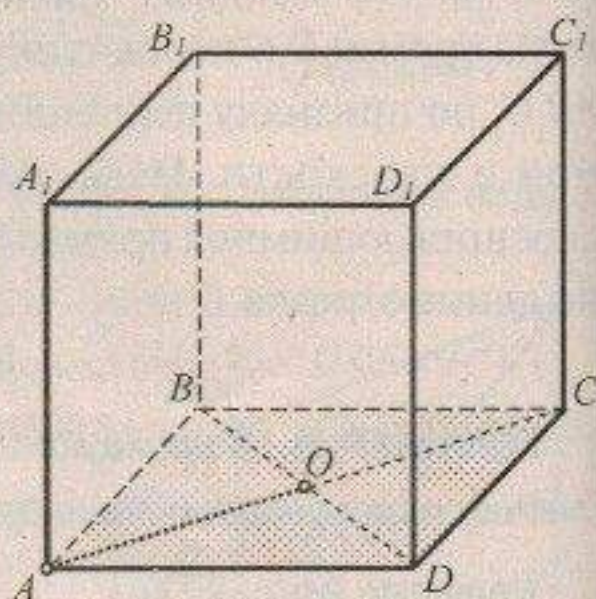


Рис. 224

ПРИМЕР 8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка O — центр основания. Построить общий перпендикуляр прямым SO и AC .

Решение.

Строим (рис. 225):

- а) $(ABC) \perp (SO)$;
- б) $O = (SO) \cap (ABC)$;
- в) $(OM) \perp (AC)$,
 $M = (OM) \cap (AC)$;
- г) $[OM]$ — общий перпендикуляр (AB) и (SC) .

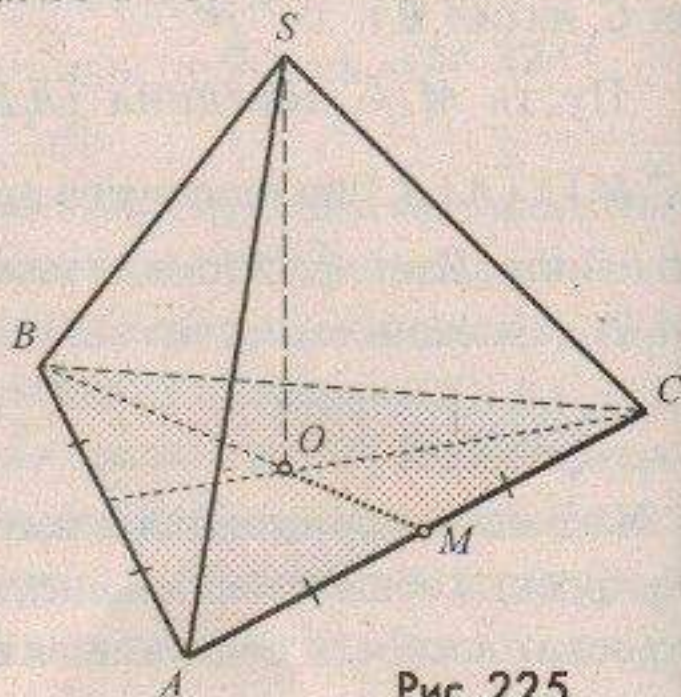


Рис. 225

ПРИМЕР 9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка O — центр основания. Построить общий перпендикуляр прямых SC и AB .

Решение.

Строим (рис. 226):

- а) $(SCM) \perp (AB)$;
- б) $M = (SCM) \cap (AB)$;
- в) $(MN) \perp (SC)$,
 $N = (MN) \cap (SC)$;
- г) $[MN]$ — общий перпендикуляр
 (AB) и (SC) .

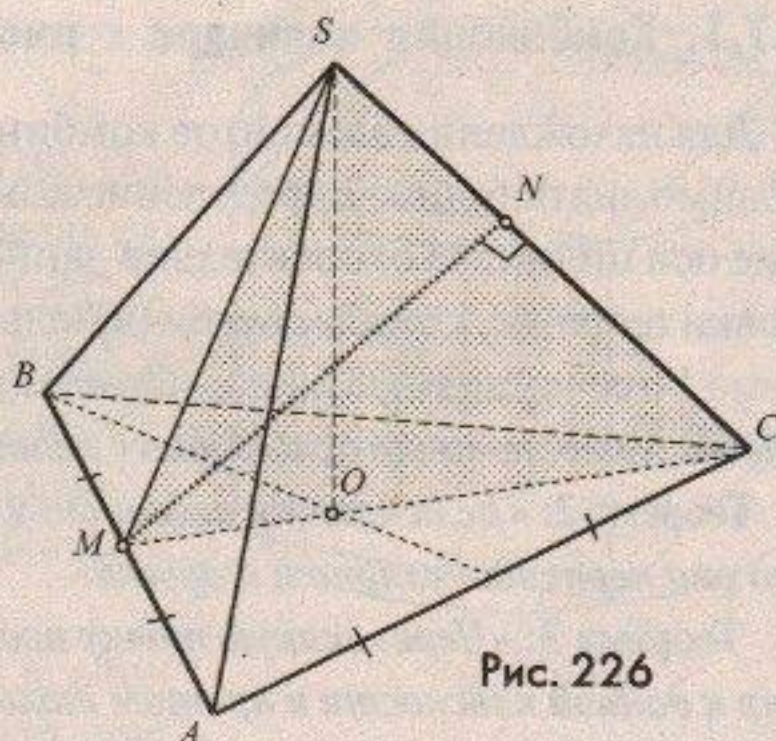


Рис. 226

ПРИМЕР 10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания. Построить общий перпендикуляр прямых SO и CD .

Решение.

Строим (рис. 227):

- а) $(ABC) \perp (SO)$;
- б) $O = (ABC) \cap (SO)$;
- в) $(OM) \perp (CD)$,
 $M = (OM) \cap (CD)$;
- г) $[OM]$ — общий перпендикуляр
 (SO) и (CD) .

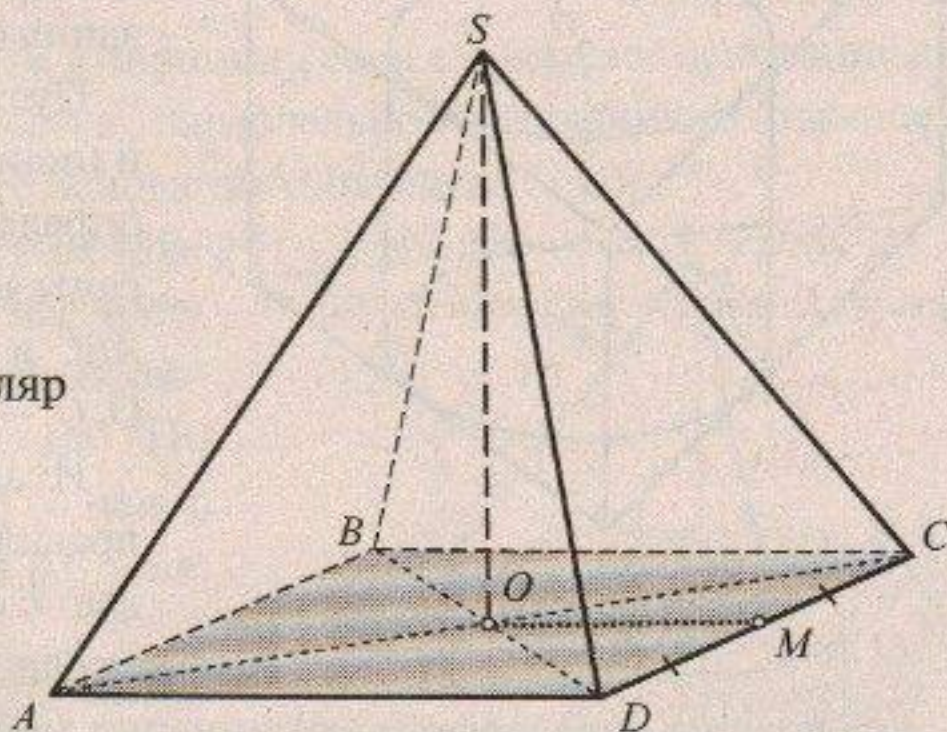


Рис. 227

3.7. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ

3.7.1. Комбинации цилиндра с многогранниками

Для нахождения элементов комбинаций цилиндра с многогранником необходимо знать точное определение комбинации и уметь обосновывать положение оси цилиндра относительно данного многогранника. Приведем формулировки теоремы, которые будем использовать для проведения обоснований. Теорема 1 о сечении пирамиды: *«Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, гомотетично основанию с центром в вершине пирамиды».*

Теорема 2: *«Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой».*

Теорема 3: *«Через всякую точку пространства можно провести перпендикуляр к данной плоскости и притом только один».*

1) Цилиндр вписан в правильную треугольную призму

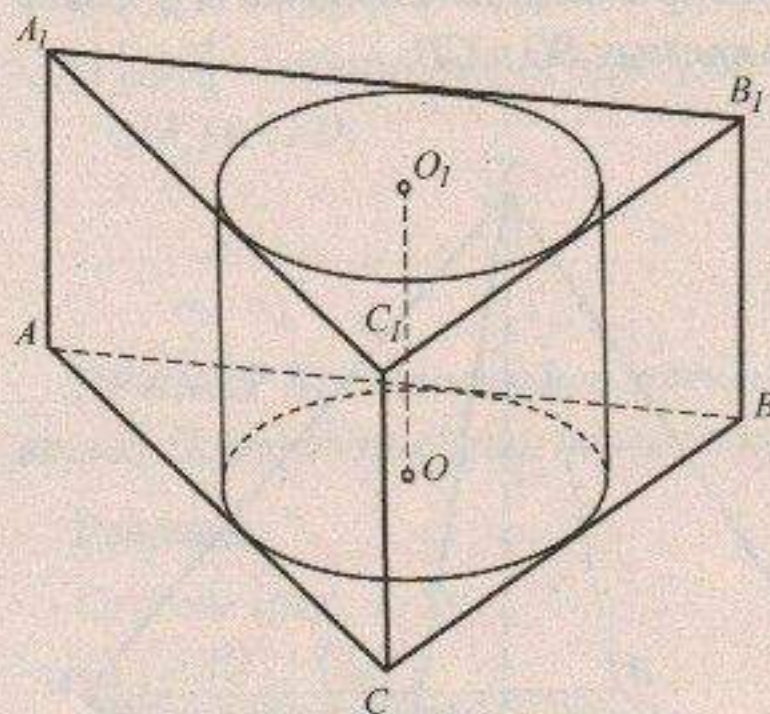


Рис. 228

Цилиндр называют вписанным в призму, если его основания вписаны в основания призмы.

Пусть O и O_1 — центры окружностей и (оснований цилиндра) (рис. 228). По определению комбинации ω и ω_1 вписаны в равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно и тогда O, O_1 — центры этих треугольников.

Итак, ось цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму, совпадает с отрезком, соединяющим центры ее оснований.

Аналогично определяется комбинация любой правильной n -угольной призмы, описанной около цилиндра.

2) Цилиндр описан около прямоугольного параллелепипеда

Цилиндр называют описанным около параллелепипеда, если основания цилиндра описаны около оснований параллелепипеда.

Пусть $[OO_1]$ — ось цилиндра (рис. 229), O и O_1 — центры его оснований. По определению комбинации прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ вписаны в основания цилиндра, поэтому O и O_1 — центры этих прямоугольников. Итак, ось цилиндра, описанного около прямоугольного параллелепипеда, совпадает с отрезком, соединяющим центры оснований параллелепипеда.

Аналогичным образом определяются комбинации цилиндра с правильной n -угольной призмой.

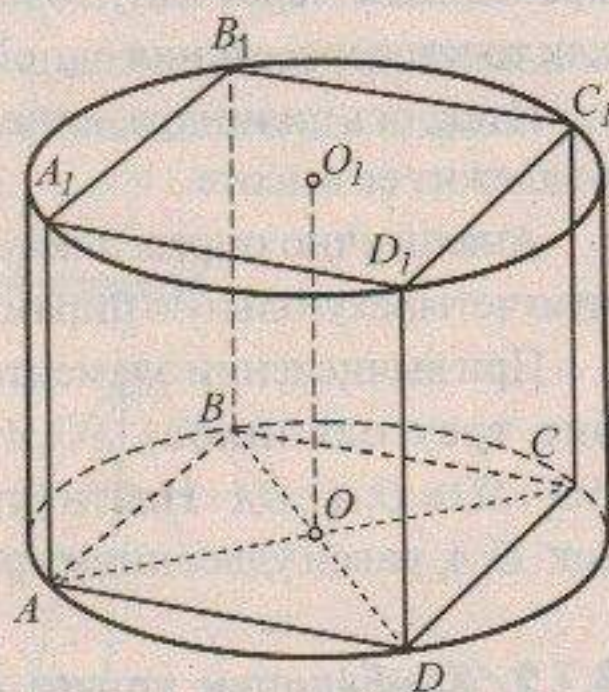


Рис. 229

3) Цилиндр вписан в правильную треугольную пирамиду

Цилиндр называют вписанным в пирамиду, если его верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а нижнее основание принадлежит плоскости основания пирамиды.

Пусть $[SO]$ — высота пирамиды, $[OO_1]$ — ось цилиндра (рис. 230); треугольник $A_1B_1C_1$ — сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. По определению комбинации O_1 — центр окружности, вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. центр этого треугольника.

По теореме о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, $O_1 \in [SO]$. Далее, поскольку $(OO_1) \perp (A_1B_1C_1)$ (по определению высоты цилиндра) и $(SO) \perp (A_1B_1C_1)$ (по теореме о перпендикуляре к одной из параллельных плоскостей),

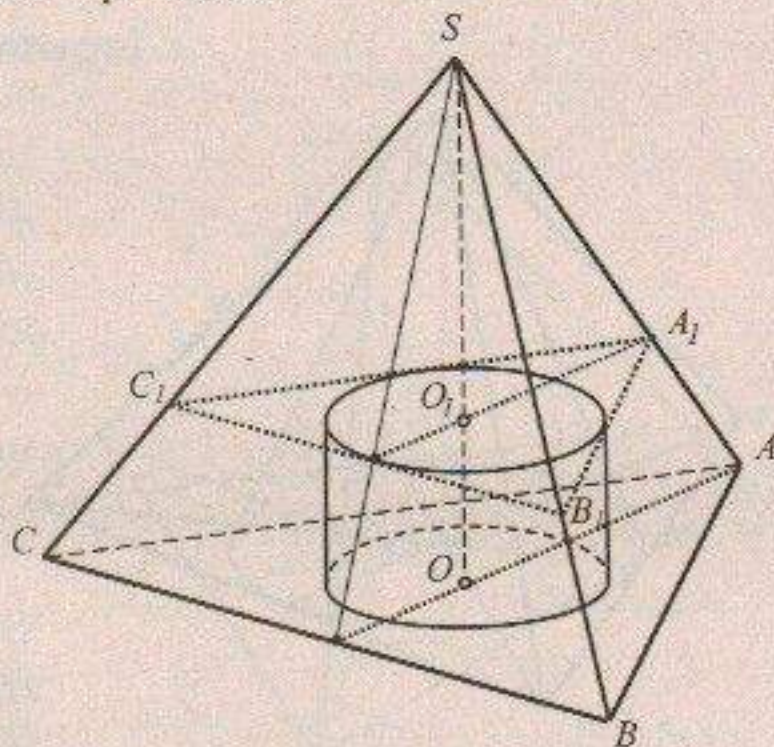


Рис. 230

то прямые SO и OO_1 совпадают (как два перпендикуляра к одной плоскости, проходящие через одну точку O_1). Очевидно далее, что точки O и O_1 совпадут как точки пересечения одной прямой с плоскостью ABC .

Итак, ось цилиндра, вписанного в правильную треугольную пирамиду, принадлежит ее высоте.

Аналогично определяются комбинации цилиндра, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду или конус.

При вычислении элементов данной комбинации можно использовать подобие треугольников SO_1A_1 и SOA , из которого получаем пропорцию $SO_1 : SO = O_1A_1 : OA$. Найти отрезки SO и OA можно из треугольника SOA , отрезок O_1A_1 равен удвоенному радиусу основания цилиндра, $SO_1 = SO - OO_1$.

3.7.2. Комбинации конуса с многогранниками

Вычисление элементов комбинации конуса с многогранником требует знания точного определения данной комбинации и умения обосновать положение оси конуса по отношению к многограннику. Для проведения обоснования используем теорему о сечении конуса: *«Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса»*.

1) Конус вписан в правильную треугольную пирамиду

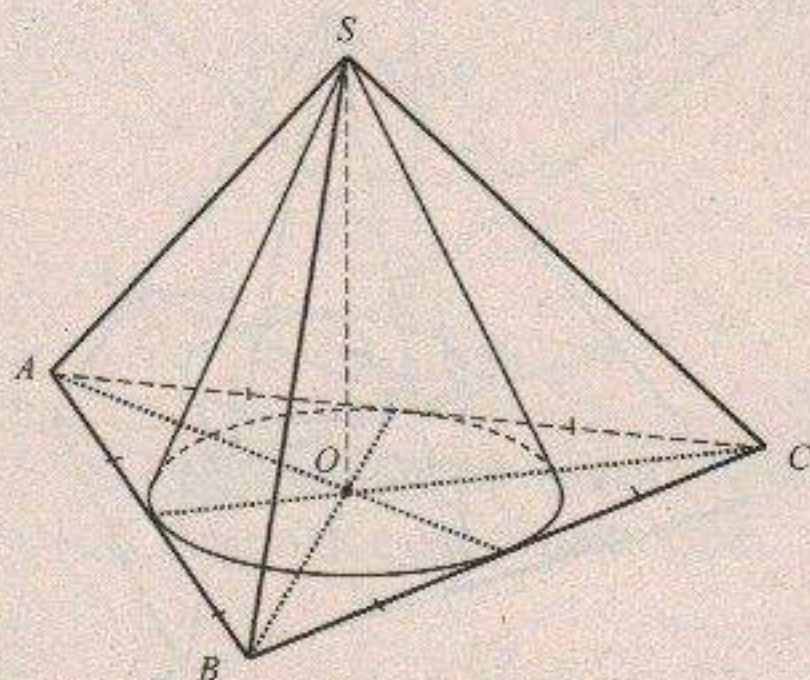


Рис. 231

Конус называется вписанным в пирамиду, если его основание вписано в основание пирамиды, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

Пусть $SABC$ — правильная пирамида, описанная около конуса с основанием ω (рис. 231). Пусть $[SO]$ — высота пирамиды, $[SO_1]$ — ось конуса. По определению комбинации окружность ω вписана в треугольник ABC , поэтому O_1 — центр этого треугольника. Пирамида $SABC$ — правильная, поэтому O — центр $\triangle ABC$. Итак, точки O и O_1 совпадают.

Высота правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса, совпадает с осью этого конуса.

По аналогии определяются комбинации конуса, вписанного в правильную четырехугольную (и вообще n -угольную) пирамиду, а также конуса, описанного около правильной пирамиды.

2) Конус вписан в пирамиду, основанием которой является прямоугольный треугольник

Пусть $[SO]$ — высота конуса, $[SO_1]$ — высота пирамиды (рис. 232). По определению комбинации O — центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC , т.е. точка пересечения его биссектрис. Прямые SO и SO_1 совпадут как два перпендикуляра к плоскости ABC , поэтому совпадут и точки O, O_1 .

Для вычисления элементов данной комбинации используются свойства окружности, вписанной в прямоугольный треугольник; в частности если L и K — точки касания с катетами, то $OLCK$ — квадрат со стороной, равной радиусу окружности.

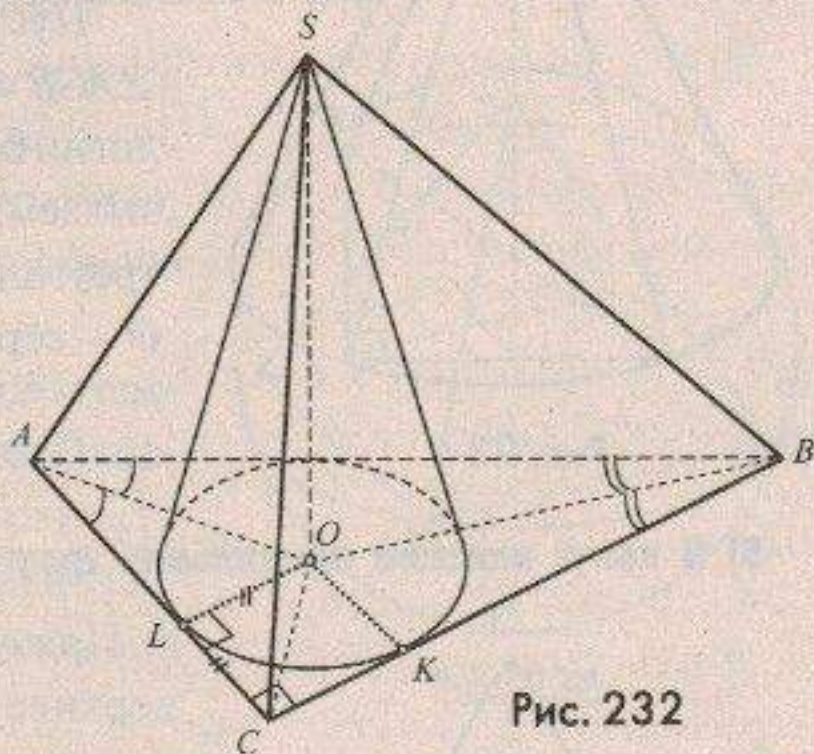


Рис. 232

3) Конус вписан в пирамиду, основание которой — равнобедренный треугольник

Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 233), $AC=BC$, $[SO]$ — высота пирамиды. По аналогии с вышеописанными комбинациями доказываем, что $[SO]$ — ось конуса.

Итак, высота пирамиды, описанной около конуса, проходит через центр вписанной в ее основание окружности.

Данный вывод может быть обобщен на любую n -угольную пирамиду, все боковые грани которой равнонаклонны к плоскости основания.

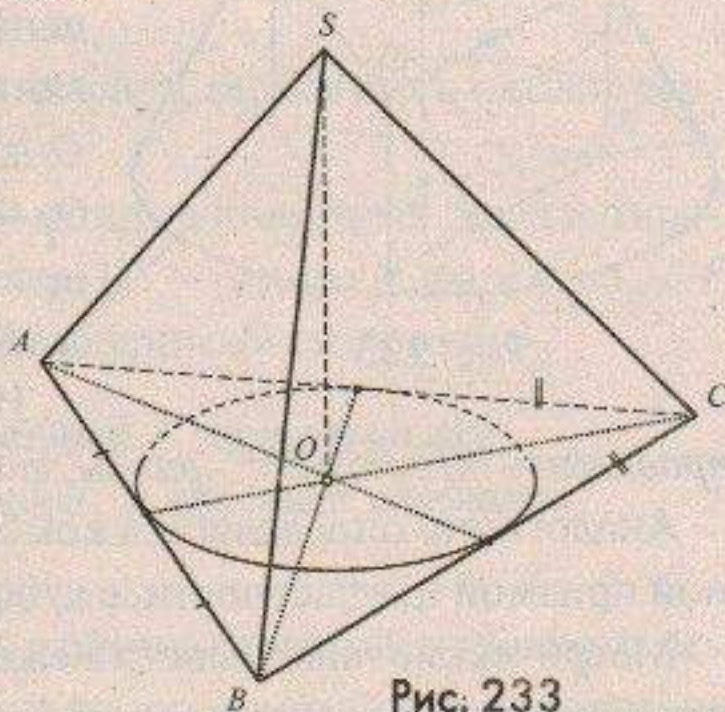


Рис. 233

4) Конус описан около пирамиды, в основании которой лежит прямоугольный треугольник

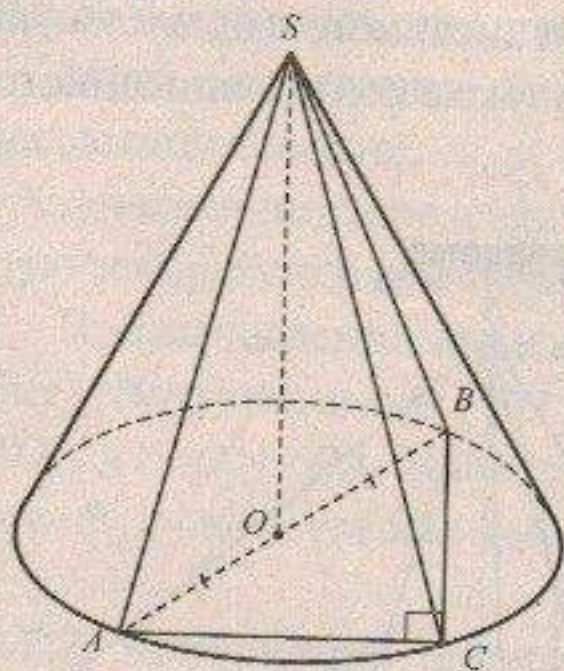


Рис. 234

Конус называют описанным около пирамиды, если основание конуса описано около основания пирамиды, а вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды.

Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 234), $\angle ACB = 90^\circ$, $[SO]$ — высота пирамиды. По аналогии с вышеописанными комбинациями доказываем, что $[SO]$ — ось конуса. Далее, поскольку треугольник ABC вписан в основание конуса, O — середина его гипотенузы AB .

5) В конус вписана правильная треугольная призма

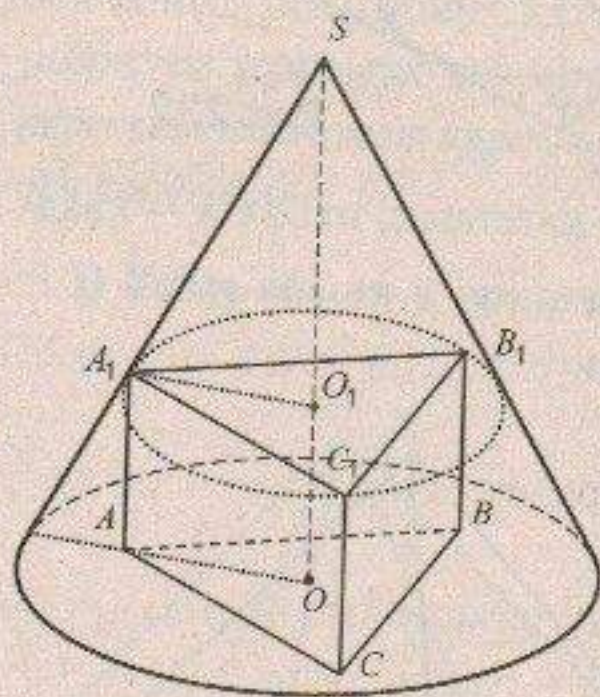


Рис. 235

Призма называется вписанной в конус, если ее верхнее основание вписано в сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, а нижнее основание призмы принадлежит плоскости основания конуса.

Пусть $[SO]$ — высота конуса (рис. 235), O_1 — центр окружности сечения, параллельного основанию. По теореме о сечении конуса имеем: $O_1 \in [SO]$. $\triangle A_1B_1C_1$ вписан в сечение, поэтому O_1 — его центр. Далее, точка O — ортогональная проекция точки O_1 на (ABC) , поэтому O — центр $\triangle ABC$.

Итак, отрезок, соединяющий центры оснований правильной треугольной призмы, вписанной в конус, принадлежит оси конуса.

Аналогично определяется комбинация конуса с правильной четырехугольной призмой и, в частности, с кубом.

Метрические зависимости между элементами конуса и призмы можно получить из подобия треугольников SA_1O и SKO , где $K = (SA_1) \cap (AO)$. Запишем про-

порцию $A_1O_1 : KO = SO_1 : SO$, в которой отрезок A_1O_1 равен $2/3$ высоты равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$, и если a — длина его стороны, то $A_1O_1 = a\sqrt{3} : 3$; $SO_1 = SO - OO_1$; отрезки SO и KO находятся из треугольника SKO .

3.7.3. Шар, описанный около многогранников и круглых тел

1) Правильная четырехугольная пирамида вписана в шар

Пирамида называется вписанной в шар, если все ее вершины принадлежат поверхности шара.

Пусть $SABCD$ — данная правильная пирамида, $[SQ]$ — высота пирамиды, O — центр описанного шара.

Докажем, что $O \in [SQ]$ (рис. 236). Воспользуемся свойством центра шара, а именно: точка O равноудалена от всех точек шаровой поверхности (в частности от точек A, B, C, D). Точки, равноудаленные от вершин основания $ABCD$ правильной пирамиды, принадлежат ее высоте.

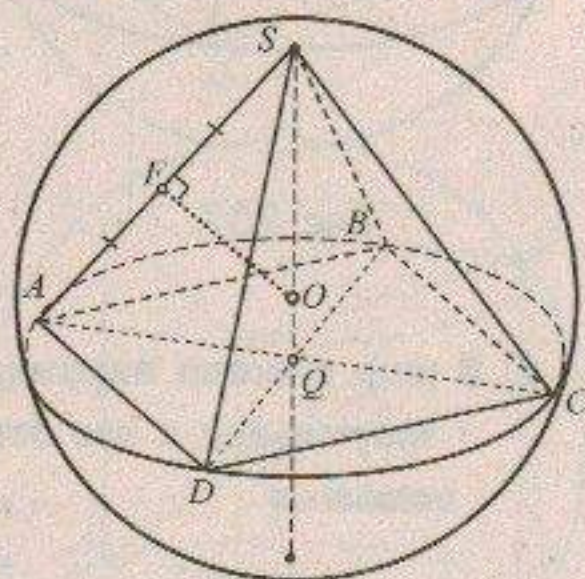


Рис. 236

Итак, центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, принадлежит ее высоте.

Далее, поскольку точка O равноудалена от точек A и S , то она принадлежит серединному перпендикуляру FO , к отрезку AS . Радиус описанного шара равен длине любого из отрезков: OA, OB, OC, OD, OS .

Аналогичным образом определяется центр шара, описанного около треугольной и вообще любой n -угольной пирамиды.

В нахождении метрических зависимостей между элементами шара и пирамиды используется треугольник SOF , в котором OS — радиус шара и угол SOF равен углу SBQ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

2) В шар вписана пирамида, в основании которой — прямоугольник и все боковые ребра которой равнонаклонны к плоскости основания

Пусть $[SQ]$ — высота пирамиды (рис. 237).

По свойству пирамиды, все ребра которой равнонаклонны к плоскости основания, получаем, что Q — центр окружности, описанной около прямоу-

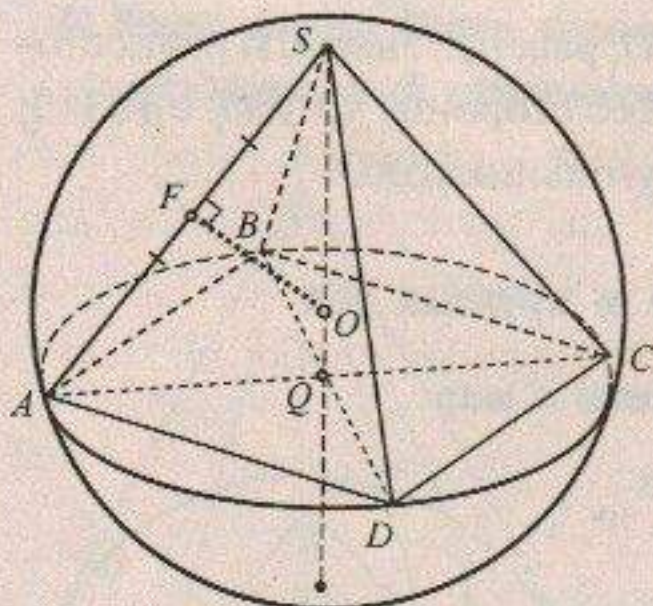


Рис. 237

гольника $ABCD$, т.е. Q — точка пересечения его диагоналей. Очевидно, каждая точка отрезка SQ будет равноудалена от точек A, B, C, D , поэтому центр O описанного шара будет принадлежать этому отрезку.

Более того, точка O будет принадлежать и серединному перпендикуляру к любому боковому ребру.

Итак, около пирамиды, все боковые ребра которой равнонаклонны к плоскости основания, можно описать шар, центр которого принадлежит высоте пирамиды.

3) В шар вписана пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник и две боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания

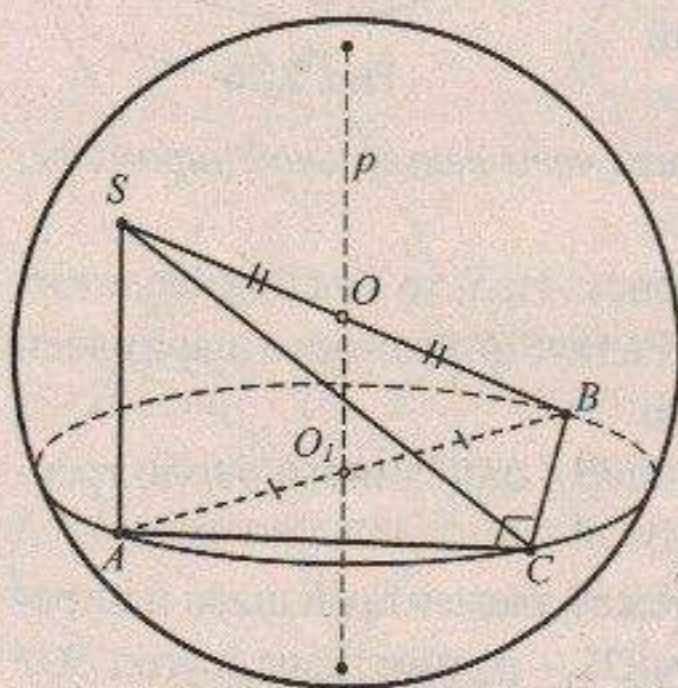


Рис. 238

Пусть $SABC$ — пирамида (рис. 238), $\angle ACB = 90^\circ$, $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$. По теореме 3 из 3.1. высотой пирамиды будет $[SA]$. Пусть O — центр описанного около пирамиды шара. Найдем положение точки O . Воспользуемся свойством центра шара:

а) $OA = OB = OC$; значит, точка O принадлежит прямой (обозначим ее p), перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку O_1 — центр описанной около треугольника ABC окружности. В треугольнике ABC угол C прямой, поэтому O_1 — середина гипотенузы AB .

Далее, поскольку $(SAB) \perp (ABC)$, то $p \subset (SAB)$ по теореме 2 из 3.1.

Итак, центр шара принадлежит прямой p , которая находится в плоскости SAB и проходит через середину отрезка AB .

б) $OS = OB$; значит, точка O принадлежит серединному перпендикуляру q к отрезку SB . Очевидно, что p и q пересекаются в середине отрезка SB .

Итак, центр O шара есть середина ребра SB .

В нахождении элементов пирамиды или шара существенным этапом является рассмотрение прямоугольного треугольника SAB , в котором: $\angle SAB = 90^\circ$, $SA = H$ — высота пирамиды, $SB = 2R$ — диаметр шара, $AB = 2r$ — диаметр описанной около треугольника ABC окружности. По теореме Пифагора записываем уравнение: $(2R)^2 = H^2 + (2r)^2$ и решаем его относительно любого из параметров R , H или r в зависимости от условия.

4) Правильная треугольная призма вписана в шар

Призма, все вершины которой принадлежат шаровой поверхности, называется вписанной в шар.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма (рис. 239), Q и F — центры ее оснований, O — середина отрезка QF . Докажем, что O — центр описанного шара.

Действительно, $OA = OB = OC$, как отрезки наклонных, имеющих равные проекции QA , QB и QC соответственно. Аналогично, $OA_1 = OB_1 = OC_1$.

Далее, из равенства треугольников OQA и OFA_1 (по двум катетам) следует, что $OA = OA_1$.

Итак, точка O равноудалена от всех вершин призмы, т.е. является центром описанного около нее шара.

Аналогичным образом определяется положение центра шара, описанного около правильной четырехугольной и вообще любой n -угольной призмы.

Итак, около всякой правильной призмы можно описать шар, центр которого — середина отрезка, соединяющего центры ее оснований.

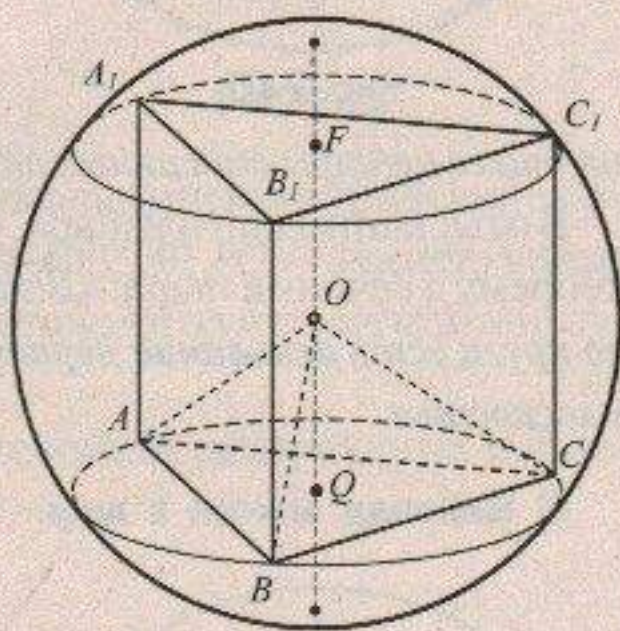


Рис. 239

5) Прямая призма, основанием которой является прямоугольный треугольник, вписана в шар

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма, $\angle ACB = 90^\circ$ (рис. 240). Найдем положение центра O описанного около нее шара, для чего воспользуемся свойством точки O : она равноудалена от точек A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 .

а) $OA = OB = OC$, поэтому O принадлежит прямой p , перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через центр Q_1 описанной около $\triangle ABC$ окружности;

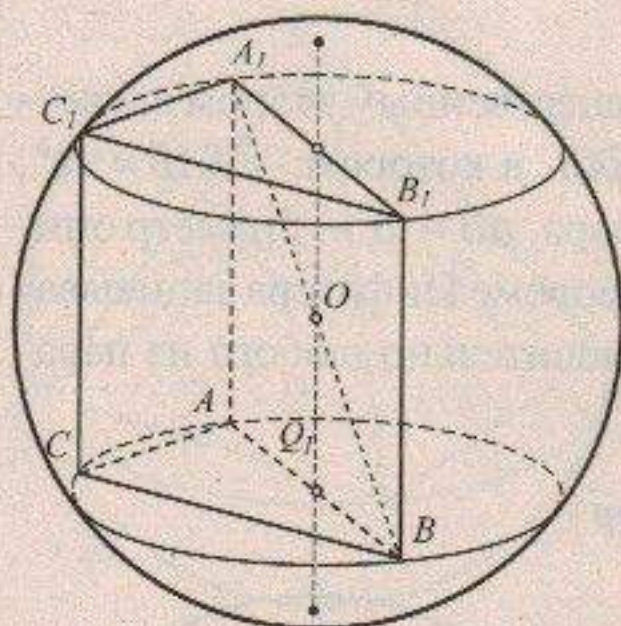


Рис. 240

но $\angle ACB = 90^\circ$, поэтому Q_1 — середина $[AB]$. Далее, поскольку плоскость грани AA_1B_1B перпендикулярна плоскости ABC , то по теореме 2 из 3.1 прямая p будет принадлежать этой плоскости.

б) $OA_1 = OB_1 = OA = OB$, а таким свойством обладает центр прямоугольника AA_1B_1B . Итак, O — центр грани AA_1B_1B .

Обобщая полученные в пунктах 4 и 5 выводы для любой прямой призмы, получим, что *около любой прямой призмы можно описать шар, центром которого является середина отрезка, соединяющего центры описанных около оснований призмы окружностей*.

В отыскании центра шара, описанного около цилиндра и конуса, используем теорему о сечении шара: «*Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость*».

6) Цилиндр вписан в шар

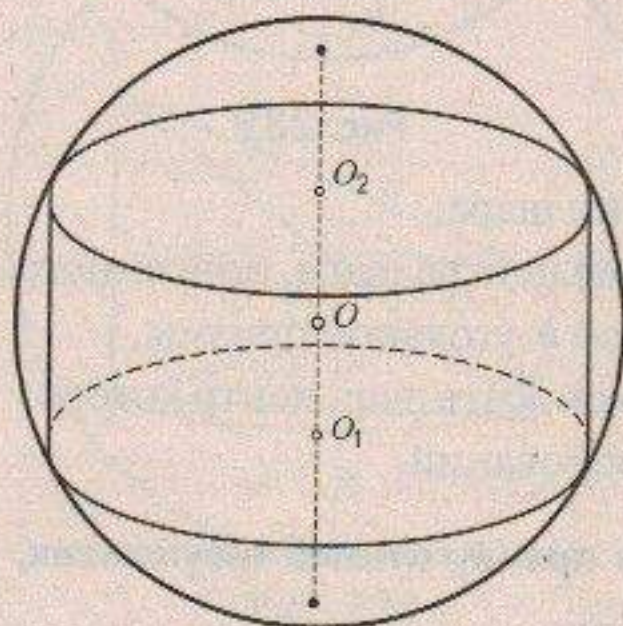


Рис. 241

Цилиндр называется вписанным в шар, если его основания являются сечениями шара.

Пусть $[O_1O_2]$ — ось цилиндра, вписанного в шар; O — центр этого шара (рис. 241). Докажем, что $O \in [O_1O_2]$. По теореме о сечении шара прямая OO_1 перпендикулярна плоскости нижнего основания цилиндра. Прямые OO_1 и O_1O_2 совпадут, как два перпендикуляра к одной плоскости в точке O_1 .

7) Конус вписан в шар

Конус называется вписанным в шар, если его основание является сечением шара, а вершина принадлежит шаровой поверхности.

Пусть $[PO_1]$ — ось конуса, O — центр описанного шара (рис. 242). Докажем, что $O \in [PO_1]$.

По теореме о сечении шара прямая OO_1 перпендикулярна плоскости основания конуса. С другой стороны, прямая PO_1 перпендикулярна плоскости основания конуса по свойству оси конуса. Прямые PO_1 и OO_1 совпадают как два перпендикуляра к одной плоскости в одной точке O_1 .

Итак, *центр шара, описанного около конуса, принадлежит оси конуса.*

При вычислении элементов комбинации полезно помнить метрические соотношения в треугольнике PQK , а именно: а) $\angle PKQ = 90^\circ$, б) PQ — диаметр шара; в) O_1K — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу; г) $\angle OPK = \angle PKO$;

д) если $\angle OPK = \varphi$, то $\angle O_1OK = 2\varphi$ (следует из свойств центральных и вписанных углов).

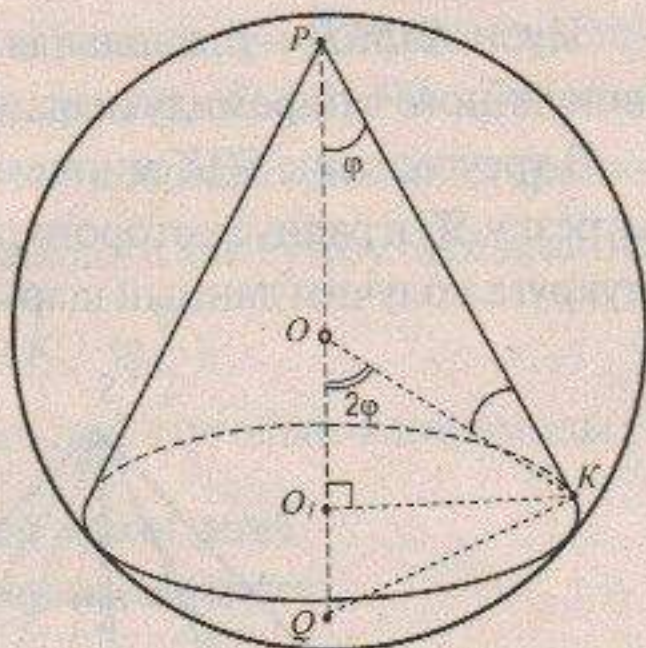


Рис. 242

3.7.4. Вписанный шар

Шар как тело вращения может быть получен от вращения полукруга вокруг диаметра, ограничивающего его.

Это определение будем использовать для нахождения положения центра шара, вписанного в многогранники и другие круглые тела. Необходимо также знание свойства касательной плоскости к шаровой поверхности, а именно: «Для того, чтобы плоскость была касательной к шаровой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была перпендикулярна к радиусу шара и проходила через его конец».

Рассмотрим комбинации с вписанным шаром.

1) Шар вписан в правильную четырехугольную пирамиду

Шар называется вписанным в пирамиду, если он касается всех граней пирамиды.

Пусть $SABCD$ — правильная пирамида (рис. 243), $[SQ]$ — ее высота, O — центр вписанного в пирамиду шара. Докажем, что $O \in [SQ]$.

В треугольник SQK впишем полукруг PLQ , центр O которого принадлежит отрезку SQ и радиус которого равен радиусу шара (рис. 244). При вращении полукруга получим данный шар. Докажем, что шар вписан в пирамиду.

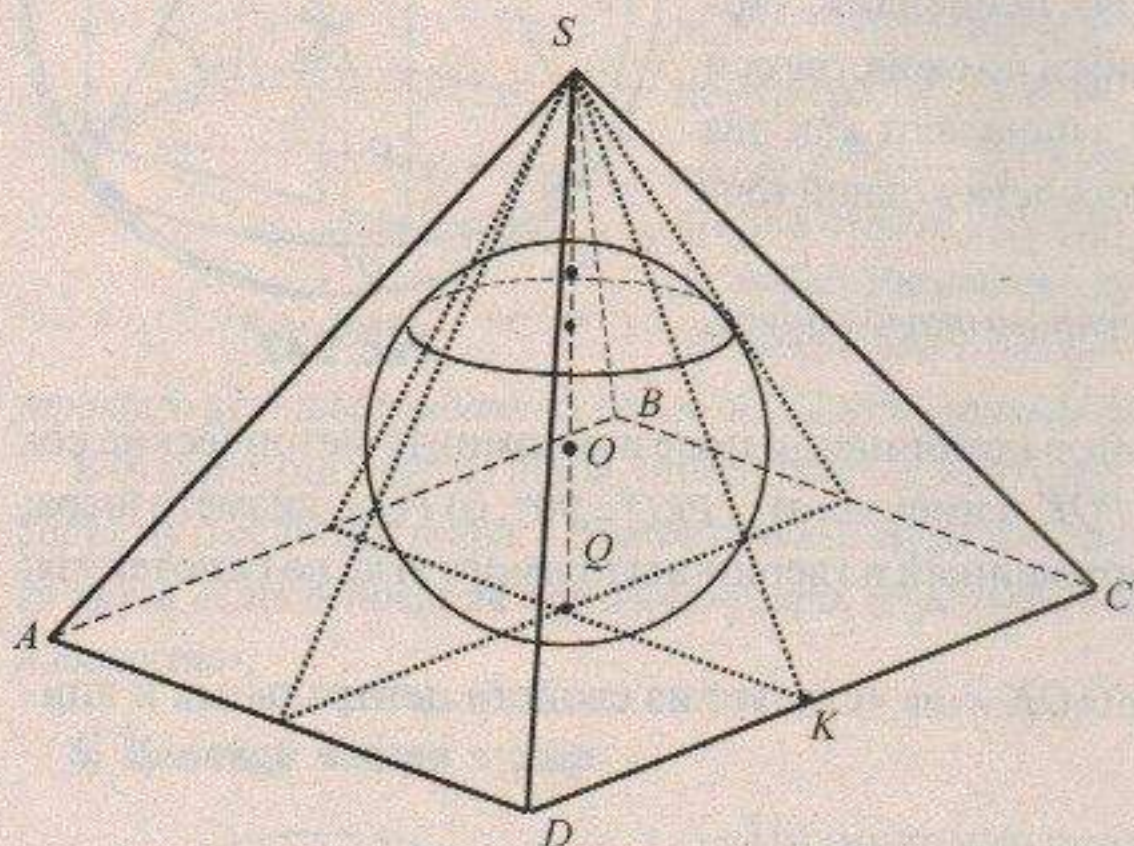


Рис. 243

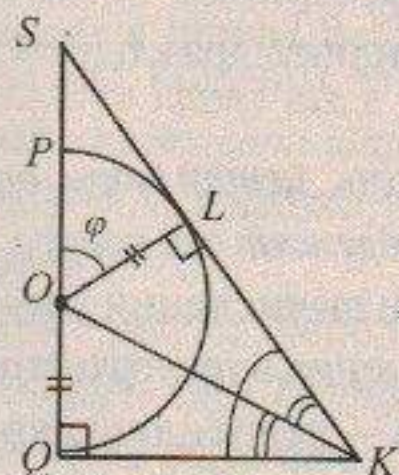


Рис. 244

Действительно, плоскость ABC основания пирамиды является касательной к шару в точке Q , так как $(ABC) \perp (OQ)$ и $Q \in (ABC)$.

Каждая боковая грань также является касательной к шаровой поверхности. Докажем, например, для плоскости SCD . Имеем: $(SQK) \perp (SCD)$ по признаку перпендикулярности плоскостей (в плоскости SCD есть перпендикуляр CD к плоскости SQK). Далее, в плоскости SQK проведен перпендикуляр OL к линии пересечения SK этих двух плоскостей. По теореме 2 из 3.1 прямая OL будет перпендикуляром к плоскости SCD . Получим, что плоскость SCD проходит через точку L шаровой поверхности и перпендикулярна радиусу OL , т.е. она является касательной к поверхности шара.

Итак, во всякую правильную четырехугольную пирамиду можно вписать шар, центр которого принадлежит высоте пирамиды.

Решение треугольника SOL поможет в отыскании метрических зависимостей между элементами шара и пирамиды. Действительно, $\angle SLO = 90^\circ$, $OL = r$ — радиус шара, $\angle SOL = \angle SKQ$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), и тогда $SO = r : \cos \varphi$. Высоту SQ пирамиды находим как сумму отрезков SO и OQ , а отрезок OQ — из треугольника OKQ ($OQ = KQ \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$).

Вывод может быть обобщен для любой правильной n -угольной пирамиды.

2) Шар вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб и все грани которой равнонаклонны к плоскости основания

Пусть $SABCD$ — данная пирамида, $[SO]$ — высота пирамиды, O — центр вписанного в пирамиду шара (рис. 245). Напомним, что Q — центр ромба (3.1).

Построим линейный угол двугранного угла с ребром CD . В треугольник SQK впишем полукруг QLP (рис. 246), при вращении которого получили данный шар.

По аналогии с рассуждениями в пункте 1) доказываем, что шар касается граней SCD и $ABCD$.

Докажем, что шар касается трех остальных боковых граней.

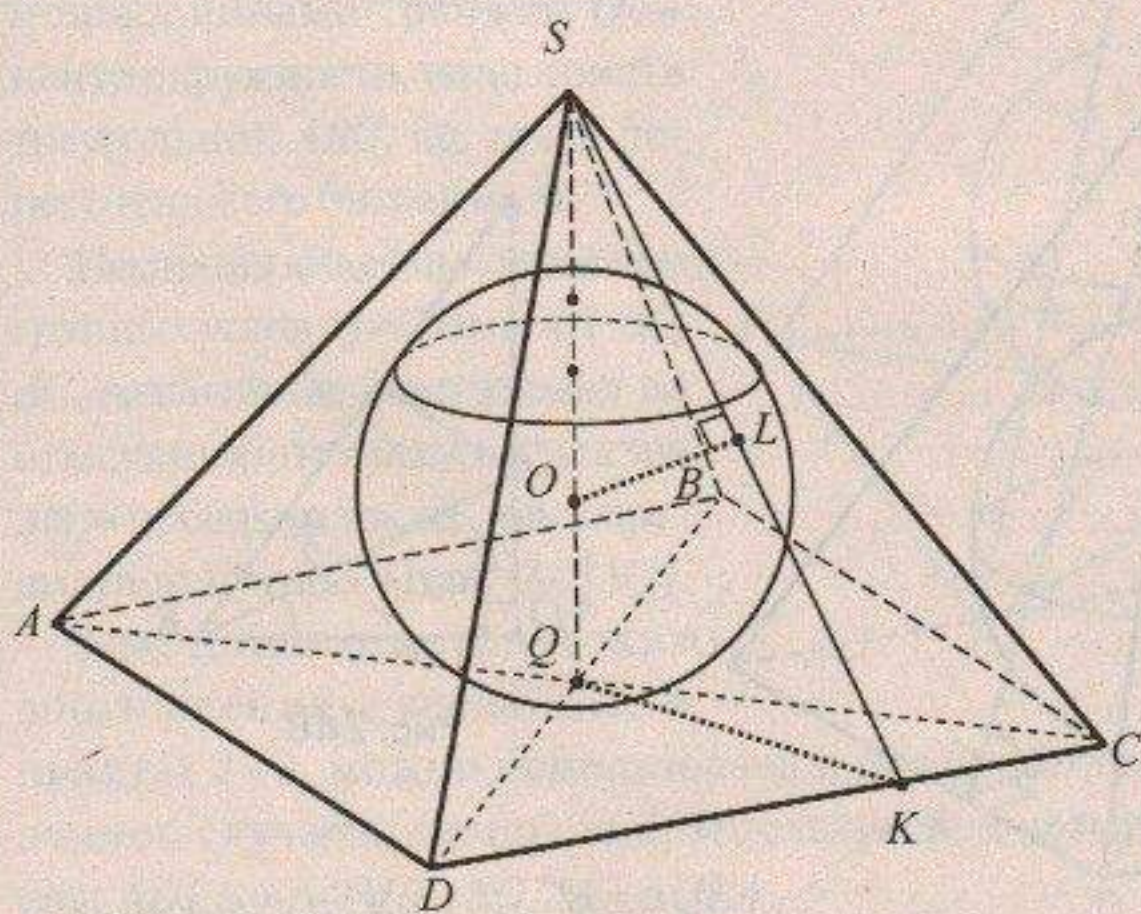


Рис. 245

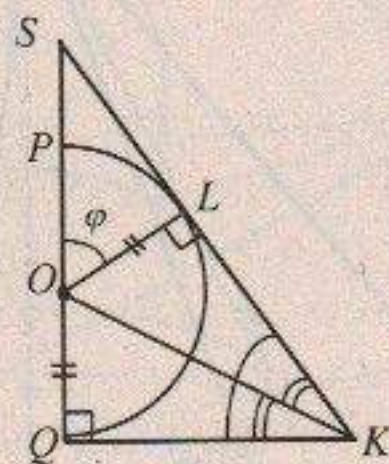


Рис. 246

Построим линейные углы двугранных углов с ребрами AB , BC , AD . Все они равны углу SKQ по условию, поэтому и все построенные треугольники с общим катетом SQ будут равны между собой.

Итак, шар можно вписать в пирамиду, у которой все боковые грани равнонаклонны к плоскости основания, причем центр шара принадлежит высоте пирамиды.

В отыскании метрических зависимостей элементов шара и пирамиды помогут:

а) свойство биссектрисы OK треугольника SQK ; б) равенство треугольников OQK и OLK ; в) подобие треугольников SOL и SKQ .

3) Шар вписан в пирамиду, в основании которой — равнобедренная трапеция и все боковые грани которой наклонены к основанию под углом α

Пусть $[SQ]$ — высота пирамиды (рис. 247). По свойству пирамиды с равнонаклонными боковыми гранями, Q — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$.

Построим линейный угол SKQ двугранного угла с ребром CD .

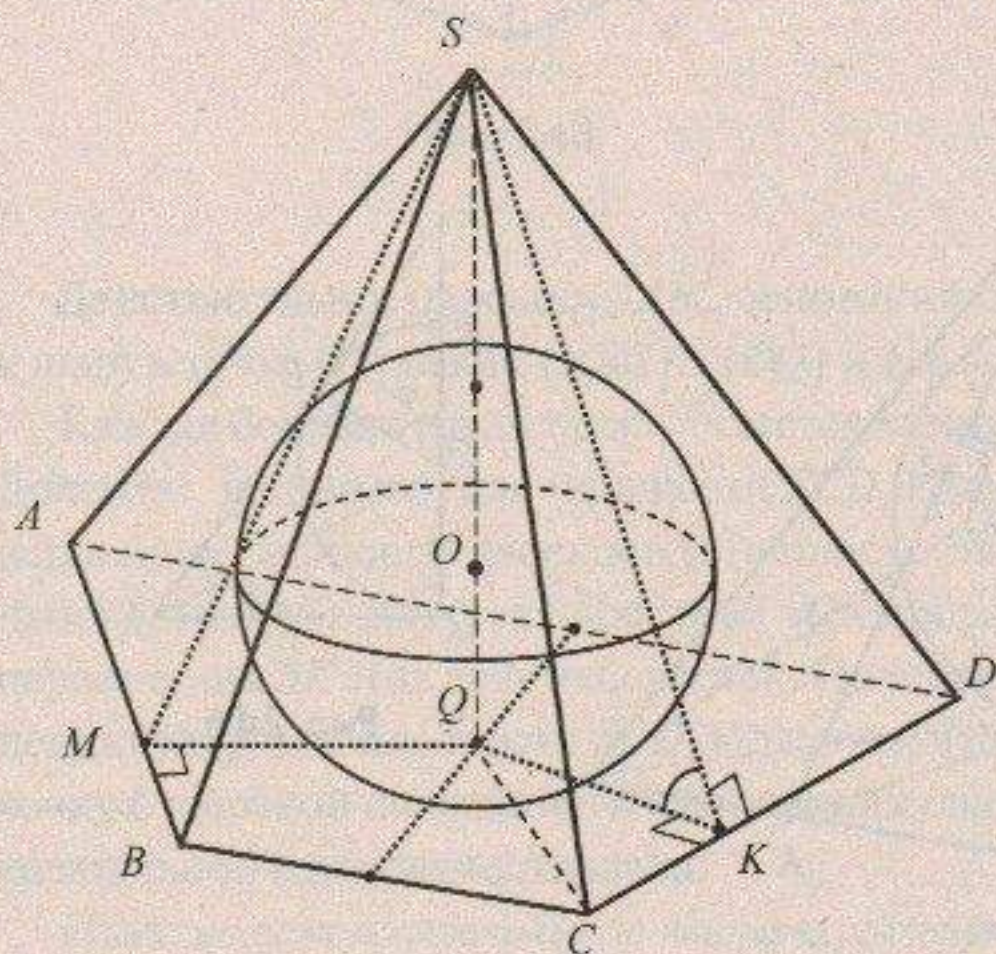


Рис. 247

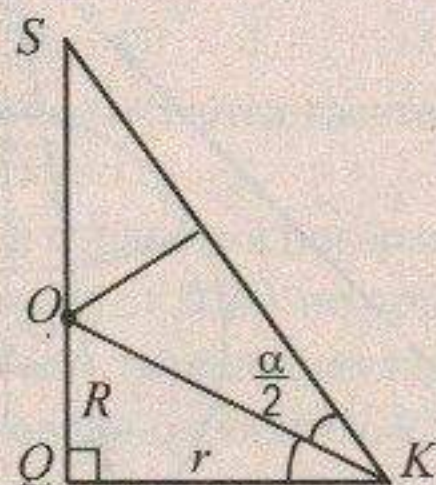


Рис. 248

В треугольник SQK впишем полукруг и, как в пункте 2, далее доказываем, что от его вращения получается шар, вписанный в пирамиду.

В дополнение к замечанию в пункте 2 о метрических зависимостях внутри треугольника SQK (рис. 248) отметим следующее: 1) поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = BC + AD$, или $2AB = BC + AD$; далее, если m — длина средней линии трапеции, то отсюда получим, что $AB = m$, т.е. боковая сторона трапеции основания равна ее средней линии; если r — радиус вписанной в $ABCD$ окружности, а R — радиус шара, то зависимость между ними

очевидна из треугольника OQK : $R = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

4) Шар вписан в пирамиду, все боковые грани которой равнонаклонны к плоскости основания и основанием которой служит прямоугольный треугольник

Пусть $[SQ]$ — высота пирамиды, O — центр вписанного шара (рис. 249).

По свойству пирамиды с равнонаклонными гранями Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , т.е. точка пересечения его биссектрис.

Построив линейные углы двугранных углов с ребрами AB , BC , AC , дальнейшие рассуждения по отысканию положения центра шара проводим так же, как в предыдущих пунктах. Итак, $O \in [SQ]$.

Замечания о метрических соотношениях, сделанные в пунктах 2–3, можно использовать и для этой комбинации. Кроме того, в данном случае полезно отметить следующее: четырехугольник $KQLC$ — квадрат; $\triangle QLB = \triangle QMB$, $\triangle QMA = \triangle QKA$.

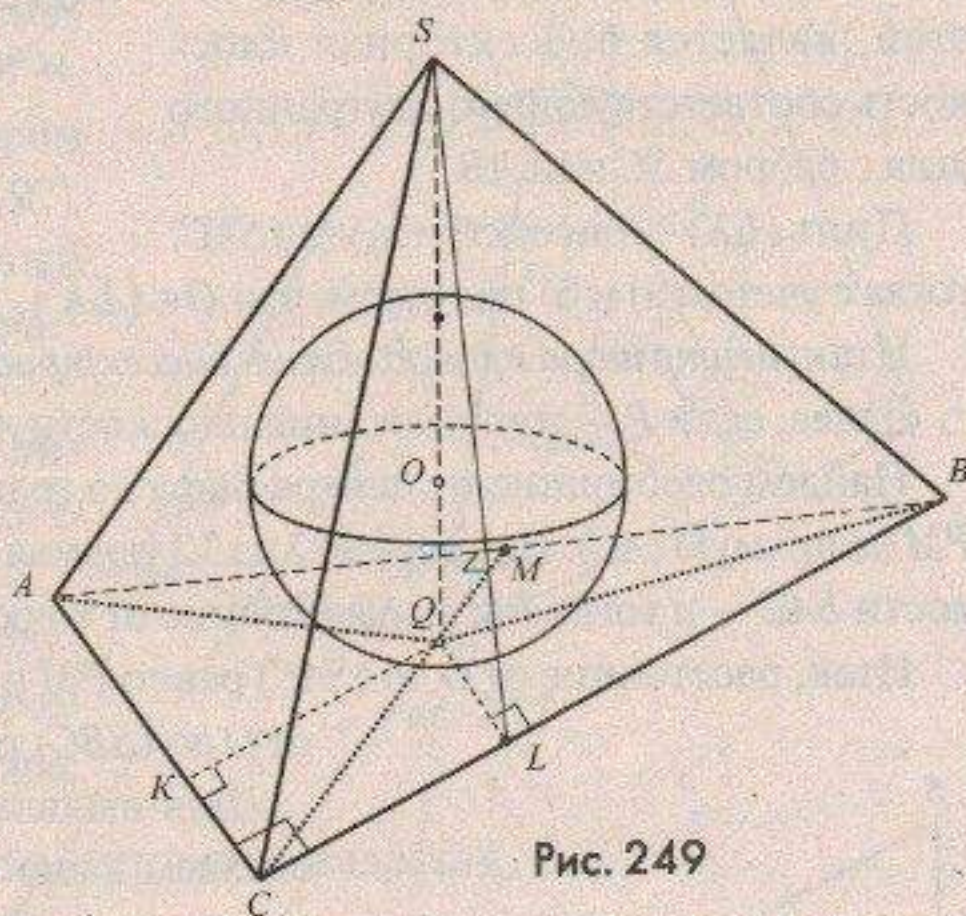


Рис. 249

5) Шар вписан в пирамиду, в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковое ребро, проходящее через вершину угла основания пирамиды, перпендикулярно основанию

Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 250), $(SC) \perp (ABC)$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$; O — центр вписанного шара. Воспользуемся свойством точки O : она равноудалена от всех граней пирамиды.

а) Точка O равноудалена от плоскостей SAC и SBC .

б) Точка O равноудалена от плоскостей SAB и ABC . Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, является биссекторная плоскость соответствующего двугранного угла с ребром SC или AB .

Пусть (LK) — биссектриса угла SKC , тогда с учетом а) и б) получаем, что $O \in (LK)$.

Итак, центр шара принадлежит биссектрисе LK треугольника SKC .

Далее, если P — точка касания плоскости ABC , то OP — радиус шара.

Найдем расстояние от центра шара до грани SAC . Опустим перпендикуляр PM на прямую (AC) . По теореме 2 из 3.1 прямая PM будет перпендикулярна плоскости SAC — и тогда PM — расстояние от точки P до плоскости SAC .

Итак, расстояние от O до (SAC) равно PM и равно радиусу шара. Расстояние от O до (SBC) также равно PM .

Для выявления метрических зависимостей сделаем выносной чертеж (рис. 251). Радиус r шара может быть найден из подобия треугольников LCK и OPK .

Составим пропорцию: $\frac{LC}{r} = \frac{CK}{PK}$, для решения которой нужно учесть следующие факты:

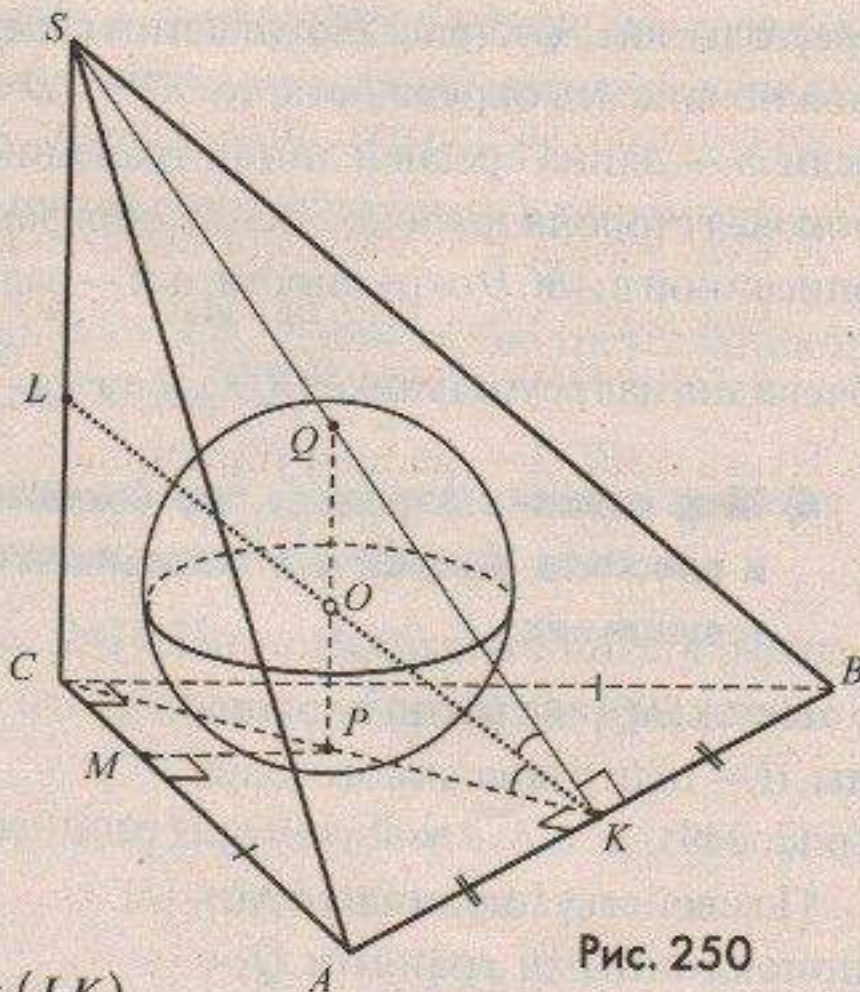


Рис. 250

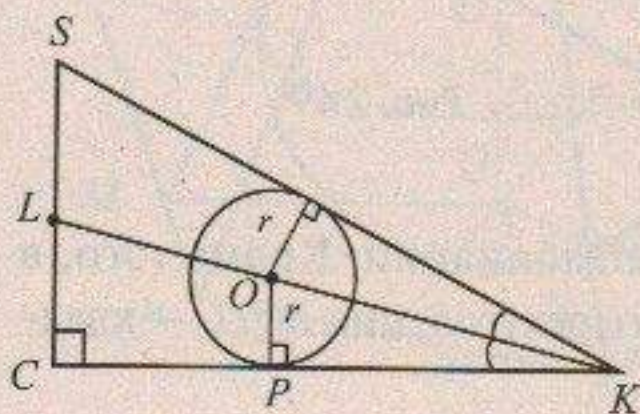


Рис. 251

- а) $CK = AK$, так как $\triangle ACK$ — равнобедренный прямоугольный;
 б) $PK = CK - CP$, причем $CP = r\sqrt{2}$ (следует из того, что $\triangle CPR$ — равнобедренный и прямоугольный);
 в) LC — часть катета, которая может быть найдена по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника, а именно: $\frac{SL}{CL} = \frac{SK}{CK}$.

6) Шар вписан в пирамиду, в основании которой — квадрат.

Два двугранных угла при ребрах основания — прямые, а два другие равны α

Пусть $SABCD$ — данная пирамида (рис. 252), $[SB]$ — высота (теорема 3 из 3.1); $\angle SAB = \angle SCB = \alpha$. Пусть O — центр вписанного шара. По аналогии с рассуждениями в пункте 5) получим, что $O \in (SBD)$.

Построим линейный угол с ребром CD . Проведем $(PK) \perp (CD)$; $(KL) \parallel (SC)$, и тогда $(KL) \perp (CD)$. Построенный угол LKP — линейный угол двугранного угла с ребром CD .

Проведем биссектрису этого линейного угла и получим, что точка O принадлежит этой биссектрисе.

Метрические соотношения получим из треугольника OKP , в котором $\angle OPK = 90^\circ$, $OP = r$ — радиус шара.

Очевидно, $\angle OKP = \frac{\alpha}{2}$, $PK = a - r$ (a — сторона квадрата).

Находим $r = (a - r) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ — уравнение для отыскания радиуса шара.

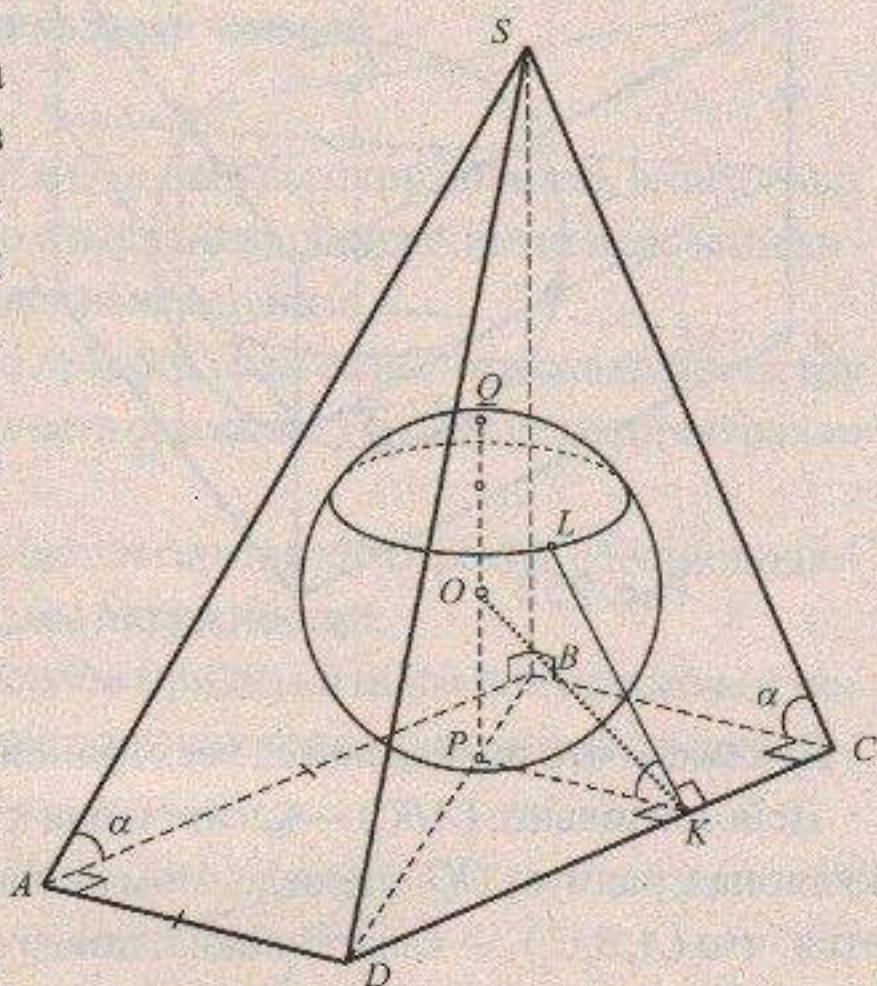


Рис. 252

7) Шар вписан в правильную треугольную призму

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма (рис. 253), P и Q центры оснований, O — центр вписанного в призму шара. Докажем, что O — середина отрезка PQ .

Обозначим S и M — середины ребер B_1C_1 и BC соответственно.

В прямоугольник $PQMS$ впишем полукруг, центр которого O — середина $[PQ]$ и радиус r которого равен радиусу шара (рис. 254). При вращении полукруга вокруг прямой PQ получим данный шар.

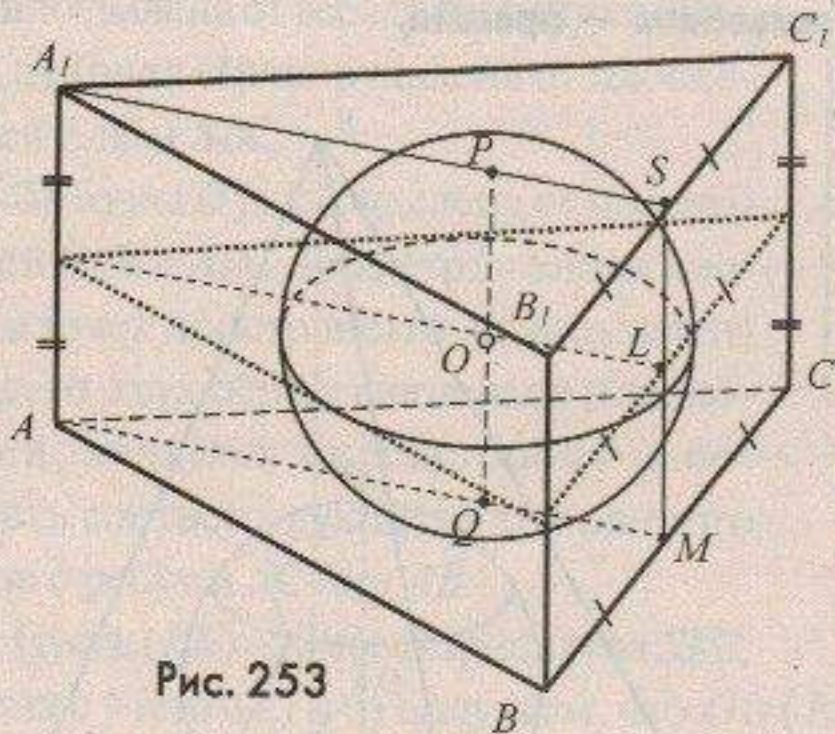


Рис. 253

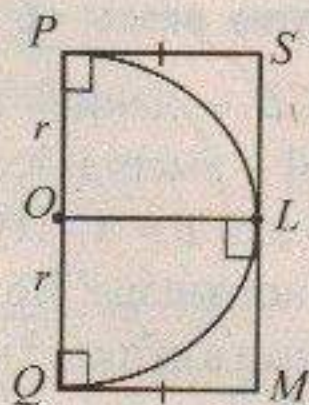


Рис. 254

Докажем, что шар касается всех граней призмы.

Действительно, (ABC) — касательная к поверхности шара, так как перпендикулярна к радиусу OQ , проведенному в точку касания Q . Аналогично доказывается, что $(A_1B_1C_1)$ — касательная к поверхности шара. Докажем, что плоскость грани BB_1C_1C — касательная к шаровой поверхности.

Очевидно, $(PQS) \perp (BB_1C_1)$, так как в плоскости (BB_1C_1) есть прямая (B_1C_1) , перпендикулярная (PQS) . Далее, (OL) проведена в плоскости (PQS) перпендикулярно к линии пересечения SM этих двух плоскостей. По теореме 2 из 3.1: $(OL) \perp (BB_1C_1)$. Итак, (BB_1C_1) перпендикулярна к радиусу OL , проведенному в точку касания L .

Две другие боковые грани будут также касательными к поверхности шара. Действительно, поскольку P и Q — центры правильных треугольников, то все прямоугольники, построенные по аналогии с $PQMS$, будут равными.

Итак, в правильную призму можно вписать шар, если высота ее равна диаметру шара, а радиус окружности, вписанной в основание призмы, равен радиусу шара. Центр шара, вписанного в правильную треугольную призму, является серединой отрезка, соединяющего центры ее оснований.

Легко установить метрические соотношения между элементами призмы и шара. Если a — сторона основания призмы, то $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ — радиус вписанной в него окружности, и, следовательно, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — радиус шара; $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ — высота призмы.

8) Шар вписан в прямую призму, в основании которой — прямоугольный треугольник

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма; P и Q — центры окружностей, вписанных в основания (рис. 255). Рассуждения по отысканию положения центра вписанного в призму шара аналогичны проведенным в пункте 7.

Итак, шар можно вписать в прямую призму, если ее высота равна диаметру шара, а в основание призмы можно вписать окружность, радиус которой равен радиусу шара.

Центр вписанного в призму шара является серединой отрезка, соединяющего центры вписанных в основания призмы окружностей.

Все метрические зависимости элементов призмы и шара получаются от решения прямоугольного треугольника ABC , так как радиус вписанной в него окружности равен радиусу шара.

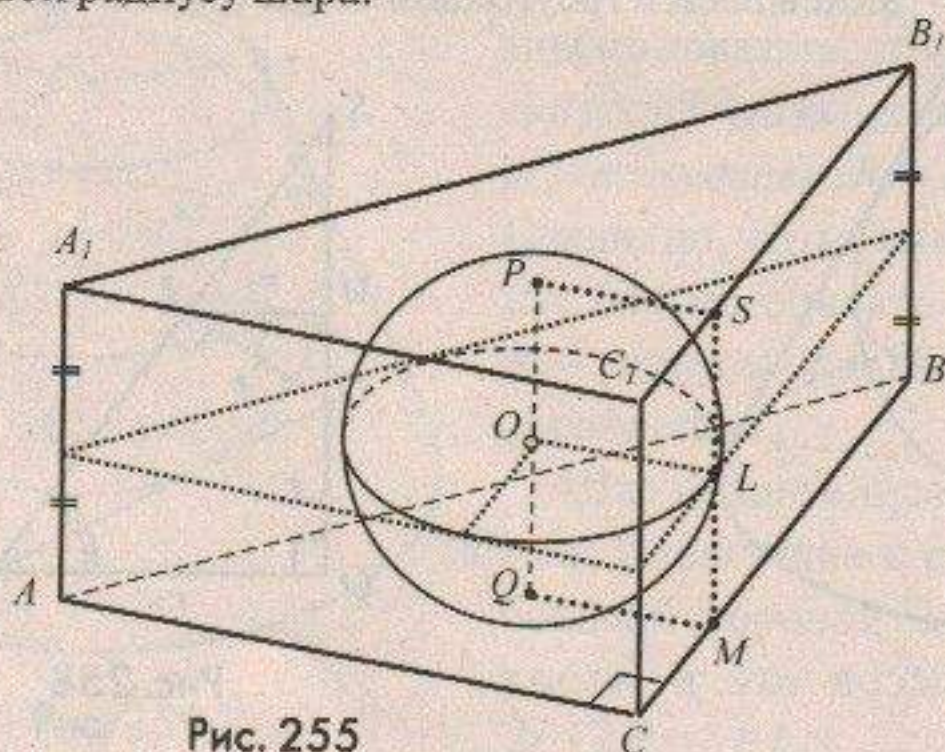


Рис. 255

9) Шар вписан в цилиндр

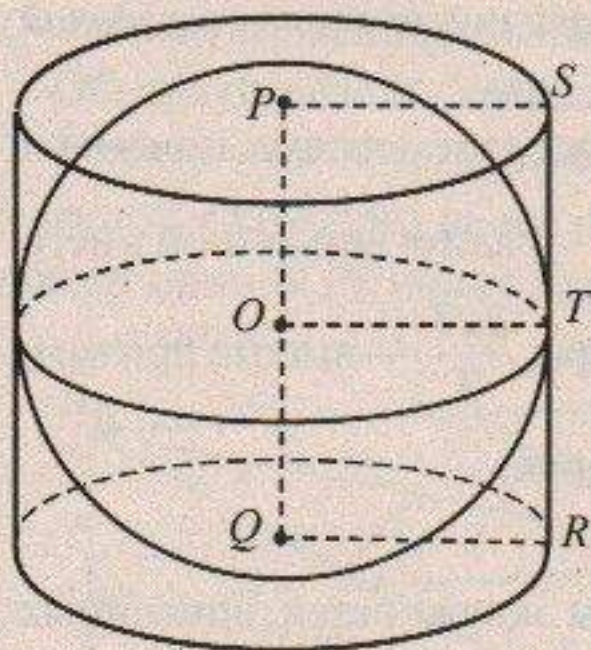


Рис. 256

Шар называется вписанным в цилиндр, если основания и все образующие цилиндра касаются шара.

Найдем положение центра шара, вписанного в цилиндр (рис. 256). Рассмотрим прямоугольник $PQRS$ и впишем в него полукруг, который касается образующей SR в точке T . При вращении вокруг прямой PQ полукруг опишет шар, а прямоугольник опишет цилиндр, описанный около шара.

Итак, центр шара, вписанного в цилиндр, является серединой отрезка, соединяющего центры его оснований.

Очевидно, что если шар вписан в цилиндр, то высота цилиндра равна диаметру его основания (так называемый равносторонний цилиндр).

10) Шар вписан в конус

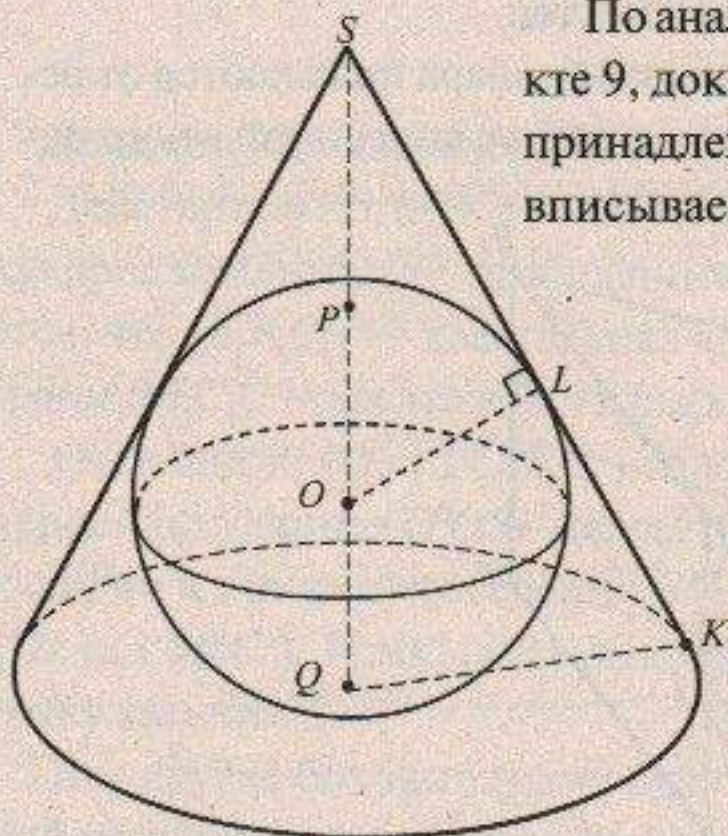


Рис. 257

По аналогии с рассуждениями, проведенными в пункте 9, доказываем, что центр вписанного в конус шара принадлежит оси конуса (рис. 257). Для этого полукруг вписываем в треугольник SQK (рис. 258).

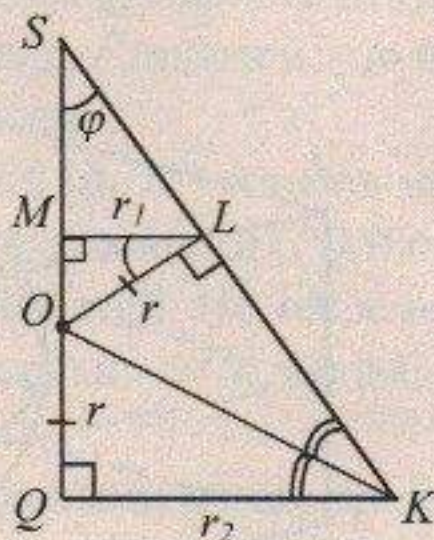


Рис. 258

Получим метрические зависимости между элементами шара и описанного конуса.

Если φ — угол между высотой и образующей конуса, r_2 — радиус его основания, l — длина образующей, r — радиус вписанного шара, r_1 — радиус окружности касания поверхности конуса с поверхностью шара, то:

$$1) \angle OKQ = 45^\circ - \frac{\varphi}{2};$$

$$2) \angle MLO = \angle QSK \text{ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами);}$$

$$3) r_1 = r \cos \varphi \text{ (из } \triangle OML \text{);}$$

$$4) r_2 = r \cdot \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \text{ (из } \triangle OQK \text{);}$$

$$5) SO = \frac{r}{\sin \varphi} \text{ (из } \triangle OSL \text{);}$$

$$6) SQ = r + \frac{r}{\sin \varphi}$$

$$7) l = \frac{SQ}{\cos \varphi} = \frac{r(1 + \sin \varphi)}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}.$$

11) Шар вписан в усеченный конус

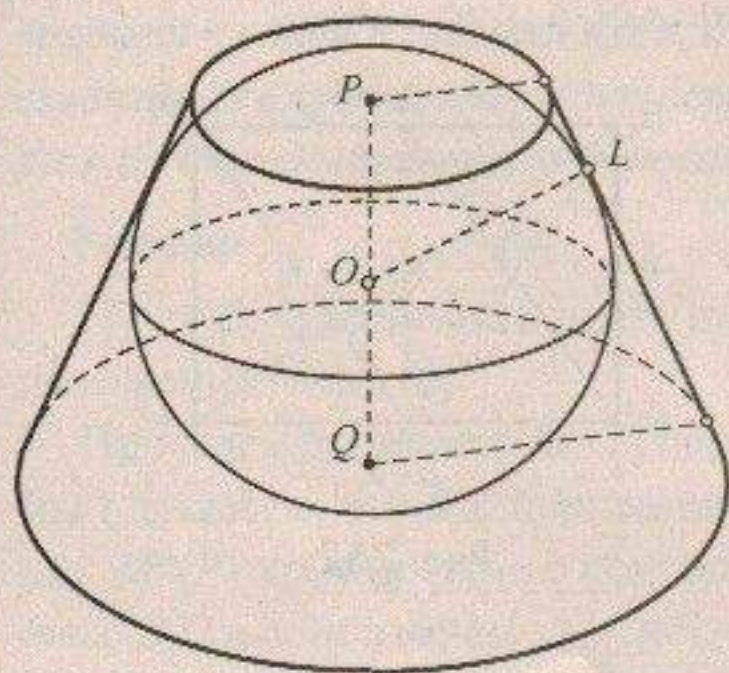


Рис. 259

По аналогии с рассуждениями в пункте 1 можно доказать, что центр шара, вписанного в усеченный конус, является серединой отрезка, соединяющего центры его оснований. Очевидно, что не во всякий усеченный конус можно вписать шар. Обозначим r и R — радиусы оснований конуса, l — длину образующей.

Шар можно вписать в усеченный конус, если в трапецию с основаниями $2r$, $2R$ и боковой стороной l можно вписать окружность, а это возможно при условии $2r + 2R = l + l$.

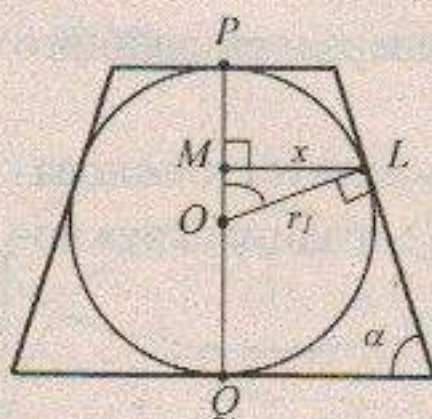


Рис. 260

Итак, в усеченный конус можно вписать шар, если выполняется условие $l = r + R$.

Если α — угол наклона образующей усеченного конуса к плоскости его нижнего основания (рис. 260), L — точка касания образующей и поверхности шара, то $\angle POL = \alpha$. Легко также найти радиус x окружности касания поверхности усеченного конуса и шара, а именно: если r_1 — радиус шара, то из $\triangle OML$ получаем, что $x = r_1 \sin \alpha$.

3.7.5 Нестандартные комбинации многогранников и круглых тел

1) Комбинации с цилиндром и конусом

В отыскании положений осей цилиндра и конуса в некоторых нестандартных комбинациях с кубом используем свойство куба: «Диагональ B_1D куба перпендикулярна плоскости AD_1C ».

ПРИМЕР 1. Диагональ куба служит осью цилиндра, окружности оснований которого касаются граней куба в их центрах. Найти объем цилиндра, если ребро куба равно a .

Решение.

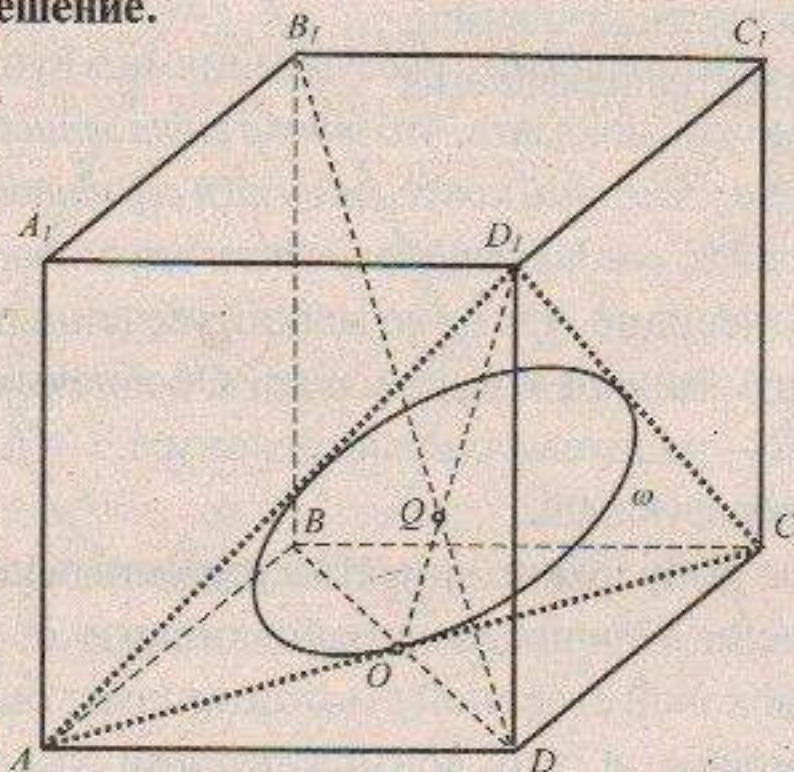


Рис. 261

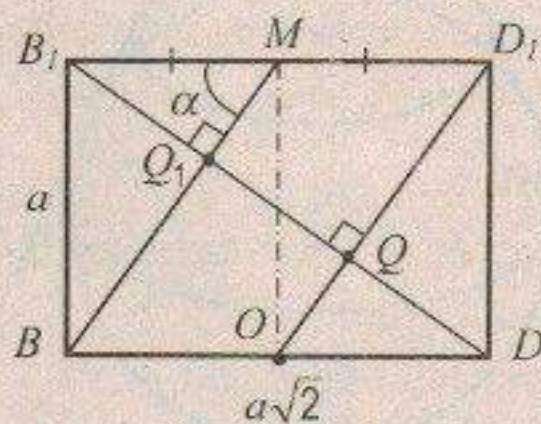


Рис. 262

Пусть Q — центр одного из оснований цилиндра. Определим положение точки Q (рис. 261).

Проведем плоскость AD_1C , и воспользуемся свойством куба: прямая BD_1 перпендикулярна плоскости AD_1C . Впишем в треугольник AD_1C окружность ω , и тогда цилиндр с осью на прямой B_1D и основанием ω — искомый.

Другое основание будет вписано в треугольник A_1C_1B , плоскость которого также перпендикулярна прямой B_1D .

Высотой цилиндра будет отрезок QQ_1 — расстояние между центрами окружностей.

Проведение вычислений требует выносного чертежа (рис. 262).

Из треугольника BB_1M находим $BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Из треугольника Q_1B_1M находим $B_1Q_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Получим $QQ_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Радиус основания цилиндра — OQ — найдем как радиус вписанной в равно-
сторонний треугольник со стороной $a\sqrt{2}$ окружности, т.е. он равен $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

$$\text{Итак, } V_{\text{ц}} = \pi \frac{6a^2}{36} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{18}.$$

ПРИМЕР 2. *Внутри куба с ребром a помещен конус так, что его вершина совпадает с одной из вершин куба, а основание конуса касается трех граней куба, сходящихся в противоположной вершине. Образующая конуса составляет с его осью угол α . Определить радиус основания конуса.*

Решение.

Пусть B_1 — вершина конуса (рис. 263), O — центр его основания. Определим положение точки O .

Проведем плоскость MNP , параллельную (AD_1C) , и с использованием теоремы 1 докажем, что B_1D перпендикулярна плоскости MNP . Впишем в треугольник MNP окружность ω с центром O (Q и K — точки касания), и тогда конус с осью B_1O и основанием ω — искомый.

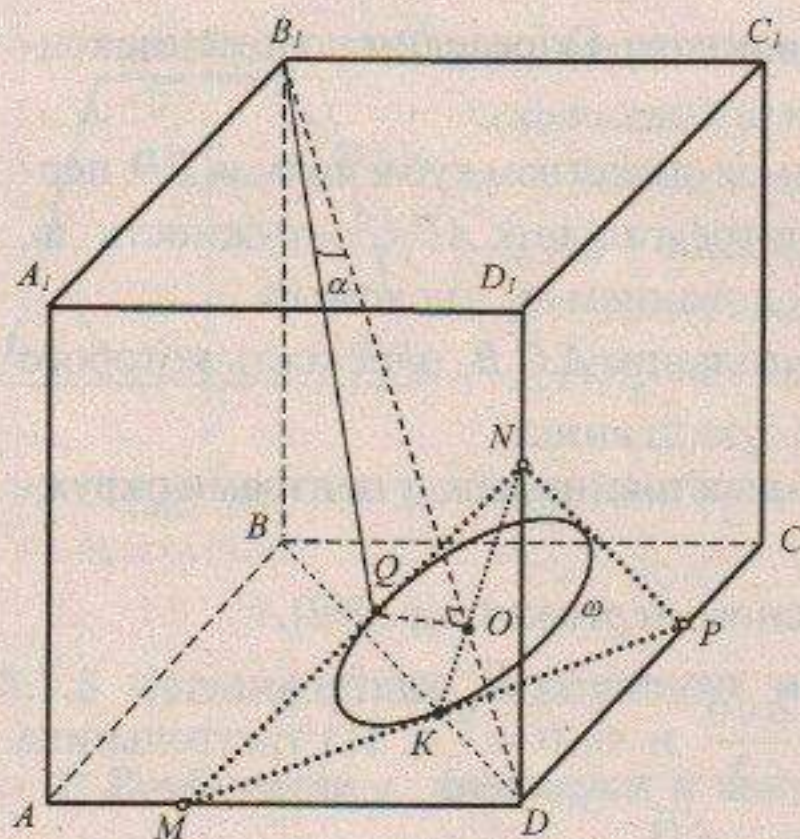


Рис. 263

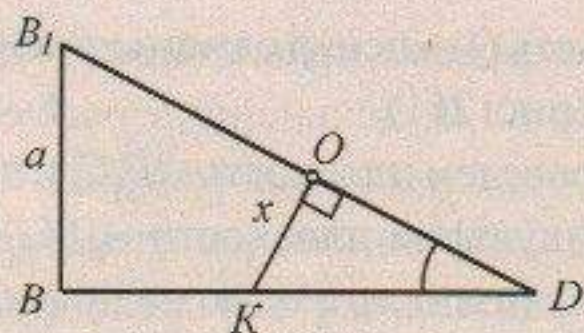


Рис. 264

Проведение вычислений требует выносного чертежа (рис. 264). Обозначим неизвестный радиус символом x . Из треугольника B_1QO находим $B_1O = x \operatorname{ctg} \alpha$. Из подобия треугольников B_1BD и OKD следует пропорция: $\frac{x}{a\sqrt{3} - x \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$,

из которой находим x : $x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg} \alpha}$.

В отыскании оси конуса в некоторых нестандартных комбинациях используем теорему о сечении конуса.

ПРИМЕР 3. Найти длину ребра правильного тетраэдра, одна вершина которого лежит в центре основания конуса, а остальные — на боковой поверхности конуса. Угол в осевом сечении конуса равен α , а радиус основания — r .

Решение.

Пусть OO_1 — высота правильного тетраэдра (рис. 265). Найдем положение точки O_1 . Точки A, B, C принадлежат боковой поверхности конуса по условию и, следовательно, сечению конуса плоскостью, перпендикулярной основанию. По теореме о сечении конуса точка O_1 принадлежит его высоте. Обозна-

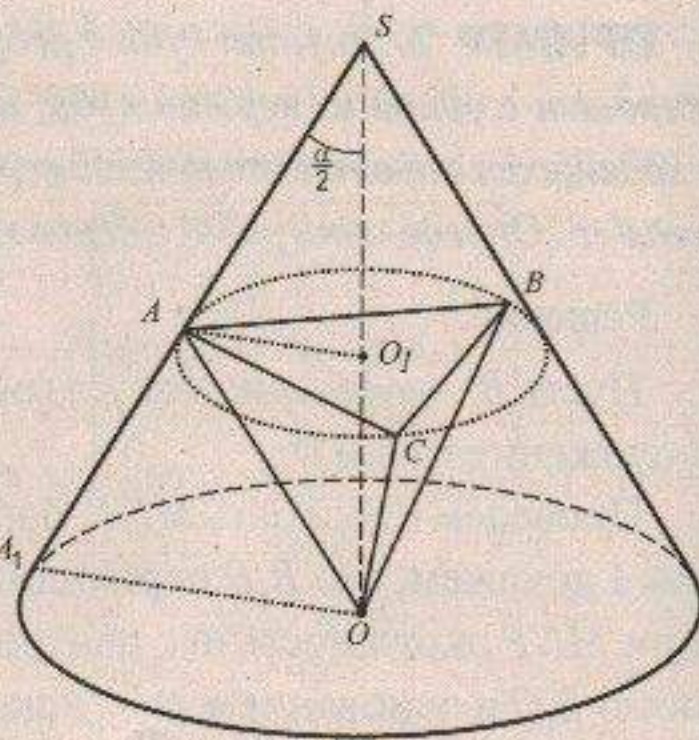


Рис. 265

чим x — ребро правильного тетраэдра и рассмотрим подобные треугольники SAO_1 и SA_1O . Дальнейшие рассуждения сводятся к составлению пропорции из

катетов: $\frac{AO_1}{A_1O} = \frac{SO_1}{SO}$. Решая уравнение, получим: $x = \frac{r\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

ПРИМЕР 4. В призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны AB и AC основания перпендикулярны боковому ребру AA_1 и взаимно перпендикулярны. Вершина конуса расположена в точке C , а окружность основания проходит через середины ребер AB , AA_1 , AC_1 . Найти объем общей части конуса и призмы, если $AA_1 = AB = AC = 12$.

Решение (рис. 266).

Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через данные точки M , N и K . Дополним призму до куба и построим, прежде всего, след XK секущей плоскости на плоскости нижнего основания.

Следы в гранях $ABCD$, BB_1D_1D , CC_1D_1D соответственно параллельны следам секущей в гранях $A_1B_1C_1D_1$, AA_1C_1C , AA_1B_1B по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей. Итак, искомое сечение куба — правильный шестиугольник, тогда сечение данной призмы — пятиугольник $MNPQK$, а общая часть

конуса и призмы — пирамида с этим основанием и вершиной C . Очевидно, высотой искомой пирамиды является отрезок CO . Действительно, можно доказать перпендикулярность прямых CO и KQ по теореме о трех перпендикулярах и, аналогично, перпендикулярность, например, прямых CO и MK .

Найдем объем правильной шестиугольной пирамиды. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник со стороной $6\sqrt{2}$, площадь которого най-

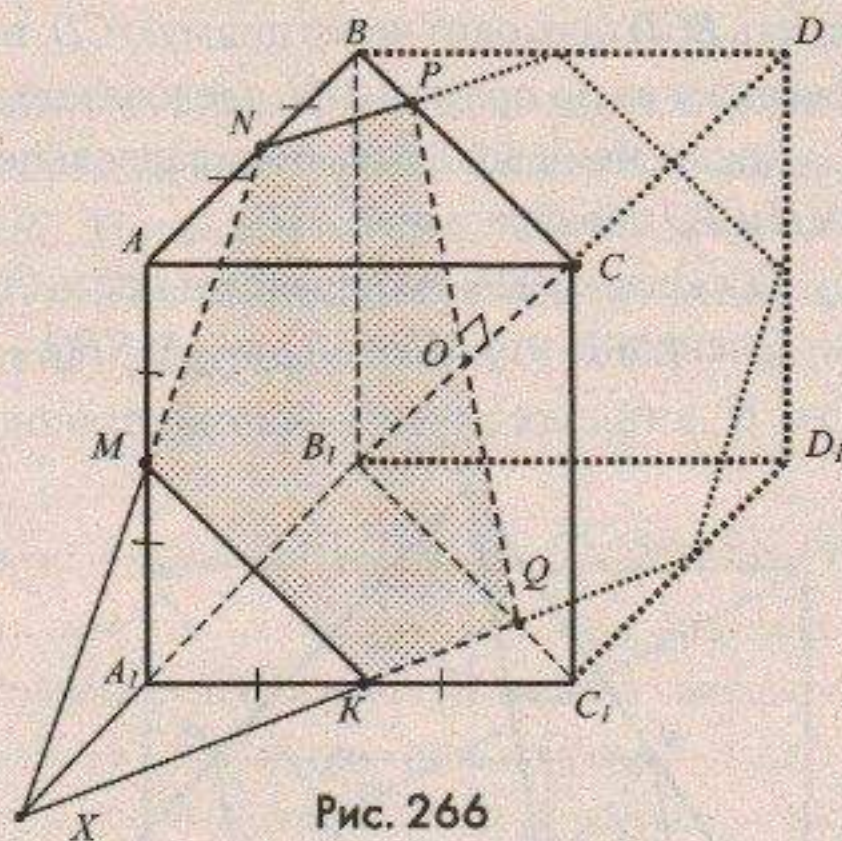


Рис. 266

дем так: $6 \cdot \frac{(6\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}$. Находим высоту пирамиды: $CO = \frac{1}{2}CB_1 = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3}$,

и тогда искомый объем $V = CO = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} 108\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \right) = 324$.

ПРИМЕР 5. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным 24, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD . Основание конуса вписано в сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину ребра CB параллельно прямым CD и AB . Найти объем конуса.

Решение (рис. 267).

Докажем, что сечением является ромб с прямым углом, т.е. квадрат. Плоскость BCD проходит через прямую CD , параллельную секущей плоскости, и пересекает ее по прямой MN , следовательно, прямые CD и MN параллельны.

Аналогично доказываем параллельность прямых CD и PQ , поэтому стороны MN и PQ параллельны.

Также доказываем параллельность сторон NP и MQ .

Очевидно, что $MN = MQ$, т.е. $MNPQ$ — ромб.

По теореме о трех перпендикулярах $CD \perp MQ$, но поскольку MN и CD параллельны, то и $MN \perp MQ$.

Найдем радиус основания конуса:

$\frac{1}{2}NM = \frac{12}{2} = 6$. Найдем высоту конуса SO из прямоугольного треугольника SMO :

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}.$$

И тогда

$$V_{\pi} = \frac{1}{3} \pi \cdot 36 \cdot 6\sqrt{2} = 72\pi\sqrt{2}.$$

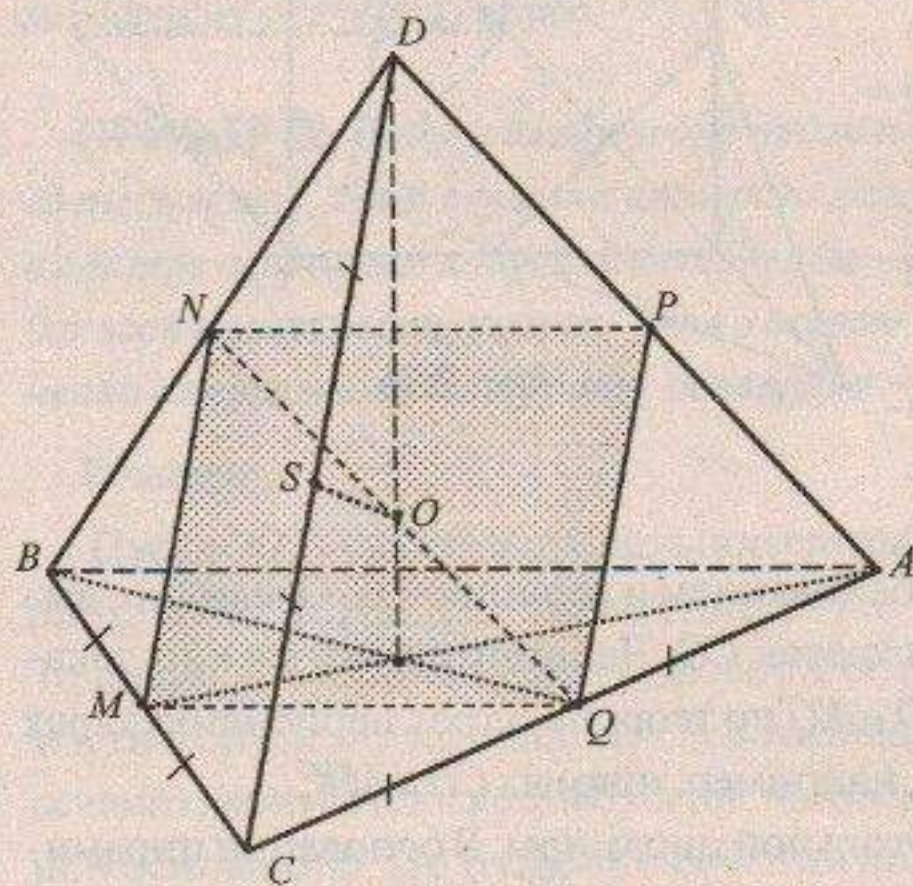


Рис. 267

2) Комбинации с шаром

Теорема о касательной к шару позволяет в нестандартных комбинациях определить положение точек касания. Реже используется малоизвестное геометрическое место точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла и расположенных внутри двугранного угла. Таким свойством обладает биссекторная плоскость этого угла.

ПРИМЕР 6. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 — боковые ребра. Сфера с центром на ребре AA_1 пересекает ребро A_1C_1 в точке M , причем $A_1M : MC_1 = 3 : 1$, касается плоскости основания ABC и плоскости CBV_1 . Найти площадь боковой поверхности призмы, если $AB = 12$.

Решение (рис. 268).

Найдем точки касания граней ABC и BB_1C_1C . По условию прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC , и тогда по теореме о касательной к шару точка A является точкой касания с плоскостью ABC . Проведем плоскость AA_1N , перпендикулярную плоскости CC_1B_1 , и прямую OK , перпендикулярную линии их пересечения. По теореме о двух перпендикулярных плоскостях OK — перпендикуляр к плоскости CC_1B_1 и, следовательно, K — точка касания. Итак, $OM = OK = OA$ — радиусы сферы.

Находим AN из равностороннего треугольника ABC : $AN = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Рассмотрим $\triangle OA_1M$: $\angle OA_1M = 90^\circ$, $A_1M = 9$. По теореме Пифагора находим $OA_1 = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 9^2} = 3\sqrt{3}$. Высота призмы $AA_1 = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

$$S_{\text{бок.}} = 3 \cdot (12 \cdot 9\sqrt{3}) = 324\sqrt{3}.$$

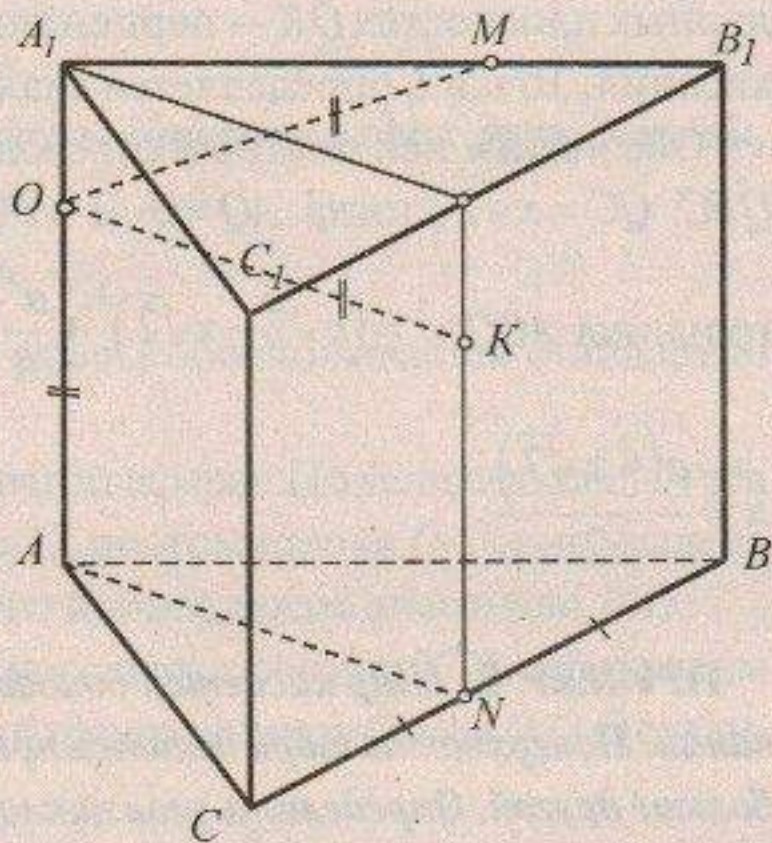


Рис. 268

ПРИМЕР 7. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ имеет длину a . Найти радиус сферы, проходящей через концы ребра AA_1 и касающейся граней двугранного угла с ребром CC_1 .

Решение.

Пусть O — центр сферы, K и L — точки касания граней $BB_1 C_1 C$ и $DD_1 C_1 C$ соответственно (рис. 269). Определим положение этих точек.

Поскольку точка O равноудалена от граней $BB_1 C_1 C$ и $DD_1 C_1 C$, она принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла с ребром CC_1 , т.е. плоскости $AA_1 C$. С другой стороны, сфера проходит через точки A и A_1 , поэтому точка O равноудалена от этих точек, следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AA_1 .

Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную грани $BB_1 C_1 C$, и в ней — перпендикуляр OK к линии их пересечения. По теореме о перпендикулярных плоскостях OK — перпендикуляр к плоскости $BB_1 C$, и тогда K — точка касания. Точка L определяется аналогично.

Обозначим неизвестный отрезок $OK = OL = OA = OA_1 = x$. Из треугольника QFC : $QC = x\sqrt{2}$, тогда $AQ = a\sqrt{2} - x\sqrt{2}$. Запишем теорему Пифагора для треугольника AOQ :

$x^2 = (a\sqrt{2} - x\sqrt{2})^2 + \frac{a^2}{4}$. Решая квадратное уравнение, получим:

$$x = \frac{a(4 \pm \sqrt{7})}{2}.$$

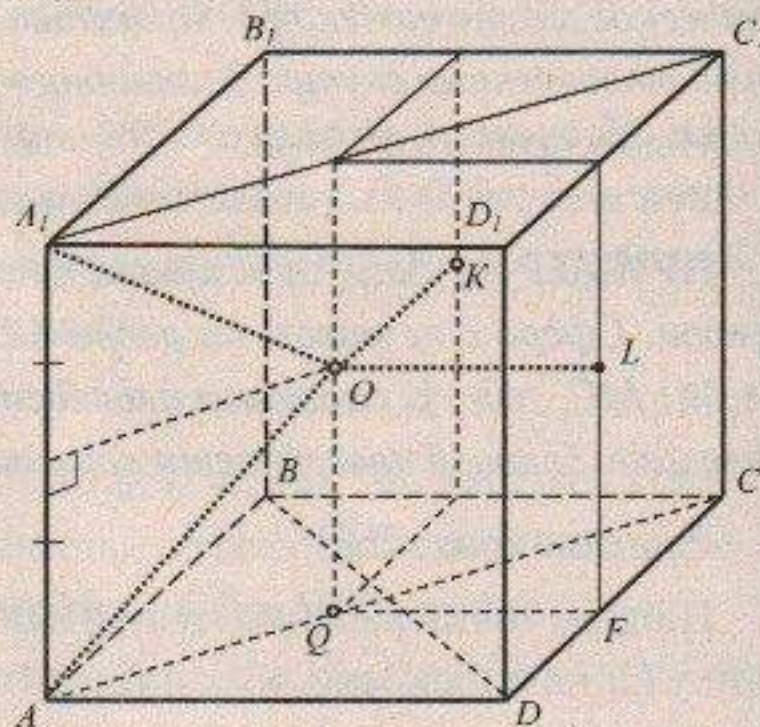


Рис. 269

ПРИМЕР 8. Шар касается боковой поверхности конуса по окружности основания. Поверхность шара делится при этом на две части, из которых одна в n раз больше другой. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

Решение (рис. 270).

Положение центра O шара в такой комбинации определяется по аналогии с центром вписанного в конус шара, т. е. $O \in (SQ)$, где Q — центр основания конуса.

Обозначим: r — радиус основания конуса, R — радиус шара, h — высота шарового сегмента. По условию площадь шарового сегмента составляет $\frac{1}{n+1}$ площади сферы, поэтому $2\pi Rh = \frac{4\pi R^2}{n+1}$, откуда

$$h = \frac{2R}{n+1}.$$

Из треугольника OQC : $\cos \alpha = \frac{R-h}{R} = \frac{n-1}{n+1}$.

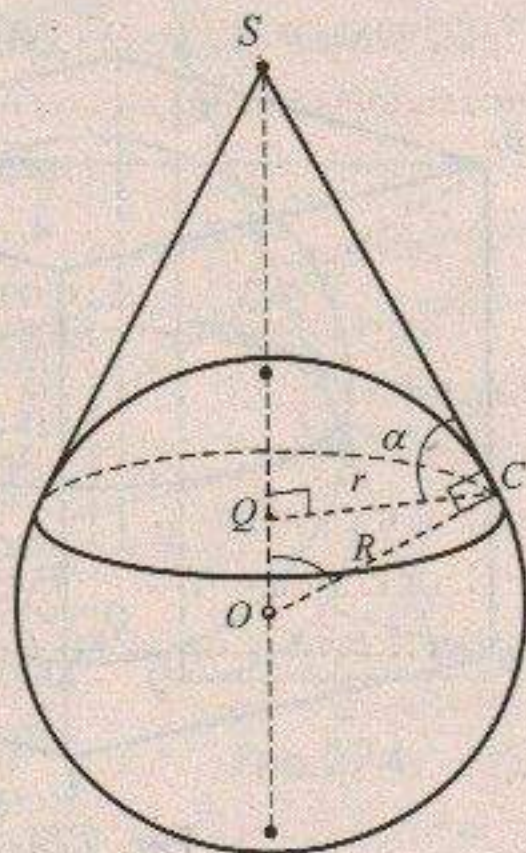


Рис. 270

3) Комбинации с двумя шарами

В отыскании положения центра шара в нестандартных комбинациях с кубом используем свойство куба: «Каждая точка диагонали B_1D куба равноудалена от граней куба, сходящихся в точке D ».

ПРИМЕР 9. В куб с ребром a вписана сфера. Найдите радиус другой сферы, касающейся трех граней куба и первой сферы.

Решение (рис. 271).

Положение центра O вписанной в куб сферы обосновывается стандартно (3.7.4).

Найдем положение точки O_1 — центра другой сферы. По условию задачи эта сфера касается граней, сходящихся в точке D , поэтому точка O_1 равно удалена от этих граней, но тогда по свойству куба она принадлежит диагонали B_1D .

Проведение вычислений требует выносного чертежа (рис. 272). Обозначим неизвестный радиус символом x . Из подобия треугольников OQD и O_1Q_1D следу-

ет пропорция: $\frac{OQ}{O_1Q_1} = \frac{OD}{O_1D}$.

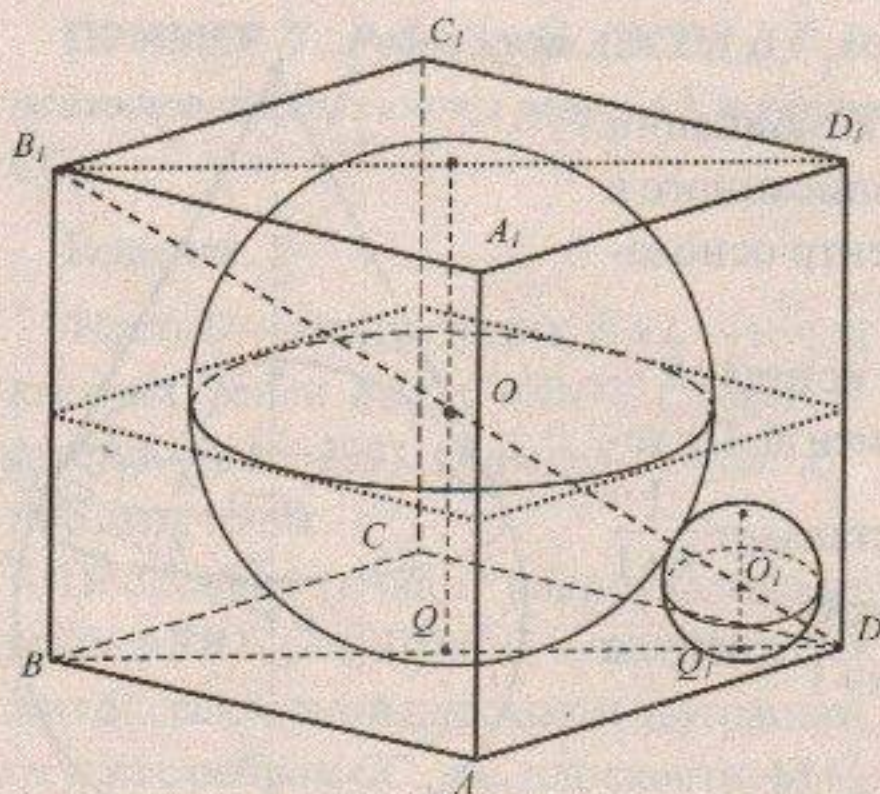


Рис. 271

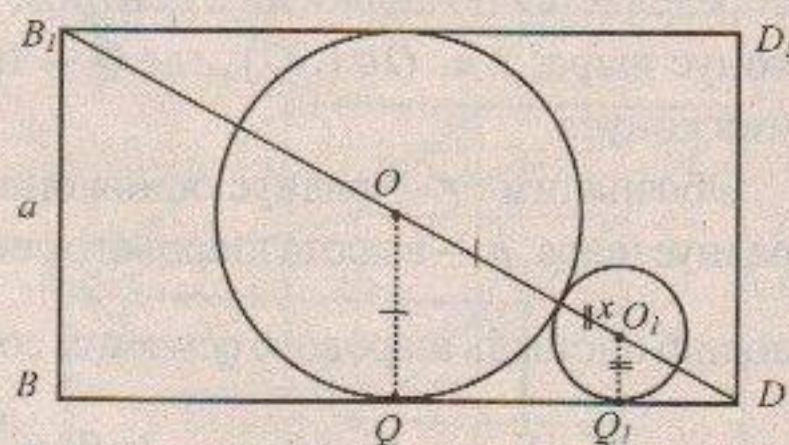


Рис. 272

После подстановки получим: $\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x - \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}},$

откуда находим $x = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}.$

ПРИМЕР 10. В правильный тетраэдр с ребром 24 вписан шар. В трехгранный угол с вершиной S вписан еще один шар, касающийся первого шара. Найдите объем второго шара.

Решение.

Проведем плоскость $A_1B_1C_1$, касательную к шару и параллельную плоскости основания тетраэдра (рис. 273).

Из условия следует, что центр O_1 второго шара равноудален от боковых граней пирамиды $SA_1B_1C_1$, поэтому он принадлежит ее высоте SO_1 .

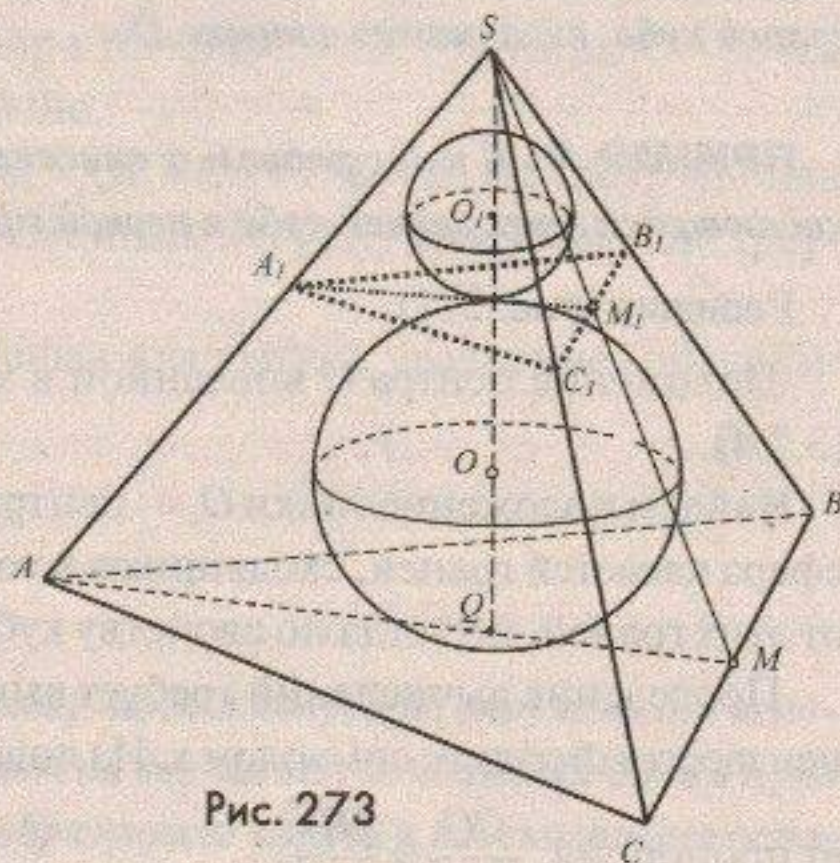


Рис. 273

Положение центра O шара, вписанного в тетраэдр $SABC$, определяется традиционным образом (3.7.4).

Проведение вычислений требует выносного чертежа (рис. 274).

Вычислим, прежде всего, радиус R шара, вписанного в тетраэдр $SABC$. Используем для этого, например, формулу $S = pR$ площади треугольника, в который можно вписать окружность радиуса R . Элементы этого треугольника: боковые стороны, равные SM , равны $12\sqrt{3}$; основание, равное двум отрезкам QM , равно $4\sqrt{3}$; высота SQ , равная $8\sqrt{6}$. Находим R , решая уравнение: $4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{6} = 16\sqrt{3} \cdot R$, откуда $R = 2\sqrt{6}$. Получим интересную зависимость между радиусами данных шаров из треугольника FGK , в котором $KR = R + r$, а $KG = R - r$. Из подобия треугольников SQM и

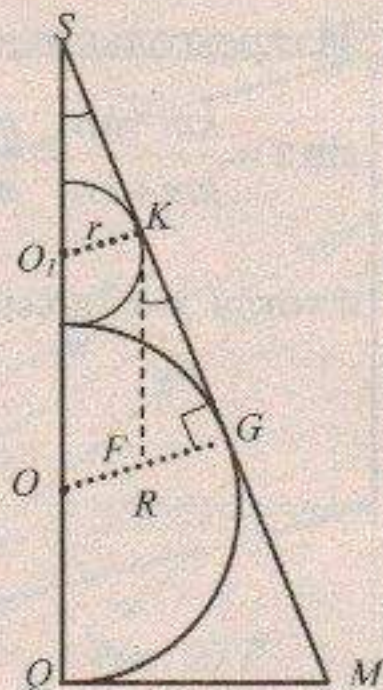


Рис. 274

KFG получим пропорцию: $\frac{R+r}{R-r} = \frac{12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$, подставив в которую найденное значение

R , найдем $r = \sqrt{6}$. Находим неизвестный объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3 = 8\pi\sqrt{6}$.

ПРИМЕР 11. В конус помещены два шара так, что они касаются друг друга и поверхности конуса. Отношение радиусов этих шаров $m:n$ равно ($m > n$). Определите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

Решение.

Обоснование положения центров шаров в данной задаче можно провести по аналогии с шаром, вписанным в конус, как в 3.7.4 (хотя ни один из них здесь не является вписанным в конус) (рис. 275).

Обозначим k — коэффициент пропорциональности, а половину неизвестного угла — символом x (рис. 276). Находим: kn и km — радиусы шаров.

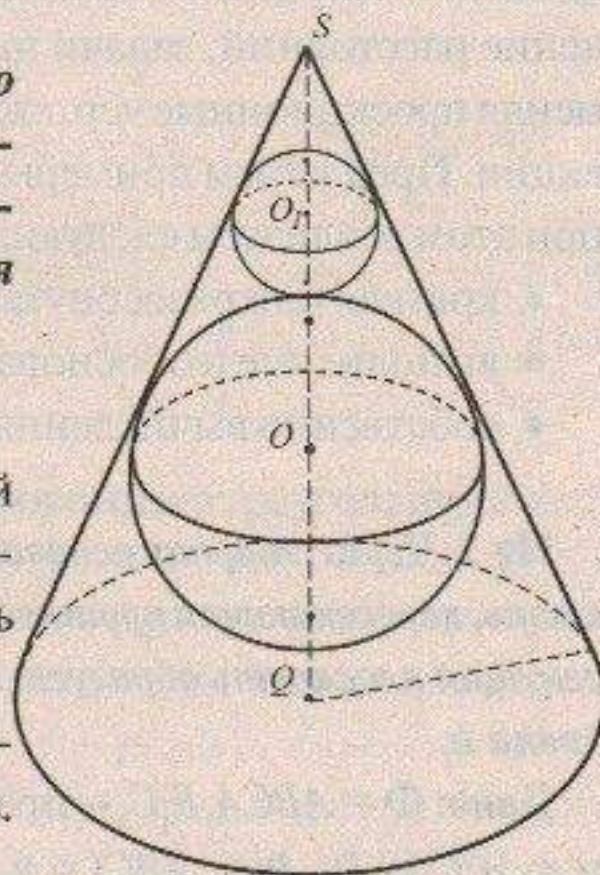


Рис. 275

Из треугольника FGK :

$$\sin x = \frac{km - kn}{km + kn} = \frac{m - n}{m + n},$$

и тогда $x = 2 \arcsin \frac{m - n}{m + n}$.

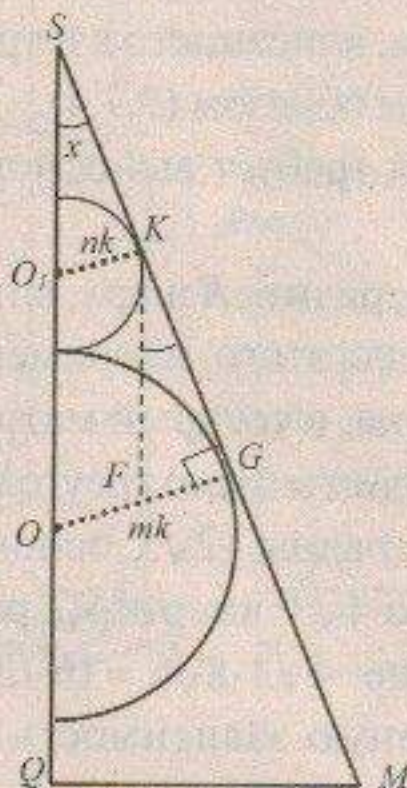


Рис. 276

3.7.6. Вычисление элементов многогранников и круглых тел на полных чертежах

Решать любые метрические задачи, относящиеся к оригиналу, например, задачи на вычисление объемов многогранников и круглых тел, задачи на вычисление расстояний, задачи на вычисление площади поверхности, можно, применяя проекционные чертежи, построенные в произвольной параллельной проекции. Предлагаем примеры решения стереометрических задач на вычисление, при этом реализуем следующие этапы:

- краткая или развернутая запись условия задачи;
- выполнение и обоснование выполнения чертежа;
- собственно вычисления.

№ 1. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найти площадь сечения, если секущая плоскость образует с плоскостью основания угол γ , а сторона основания равна a .

Дано: $\Phi = ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, α — секущая плоскость, $(AB) \subset \alpha$, $\alpha \cap [CC_1] = D$, $P(\alpha, ABC) = \gamma$, $AB = a$; $F = \Phi \cap \alpha$.

Найти: S_Φ

Решение (рис. 277).

$$1) F = \Delta ABD.$$

В ΔABD : $AD = BD$ (из равенства ΔACD и ΔBCD).

2) $\gamma = \angle(\alpha, ABC)$ — двугранный угол с ребром AB .

Пусть K — середина $[AB]$, тогда $[DK]$ — высота в ΔABD , $[CK]$ — высота в ΔABC (свойство равнобедренного треугольника).

$$\left. \begin{array}{l} (DK) \perp (AB) \\ \text{Итак, } (CK) \perp (AB) \\ K \in (AB) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CKD - \text{линейный угол двугранного угла плоскостей}$$

α и (ABC) .

По условию этот угол равен γ , поэтому $\angle DKC = \gamma$, и можно отметить его на чертеже.

$$3) S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DK$$

$$\text{Из } \Delta CDK: DK = \frac{CK}{\cos \gamma},$$

$$\text{тогда } S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot CK : \cos \gamma, \text{ и}$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos \gamma}.$$

Используя известную формулу площади равностороннего треугольника

$$\left(S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right), \text{ получим: } S_{\Delta ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \gamma}.$$

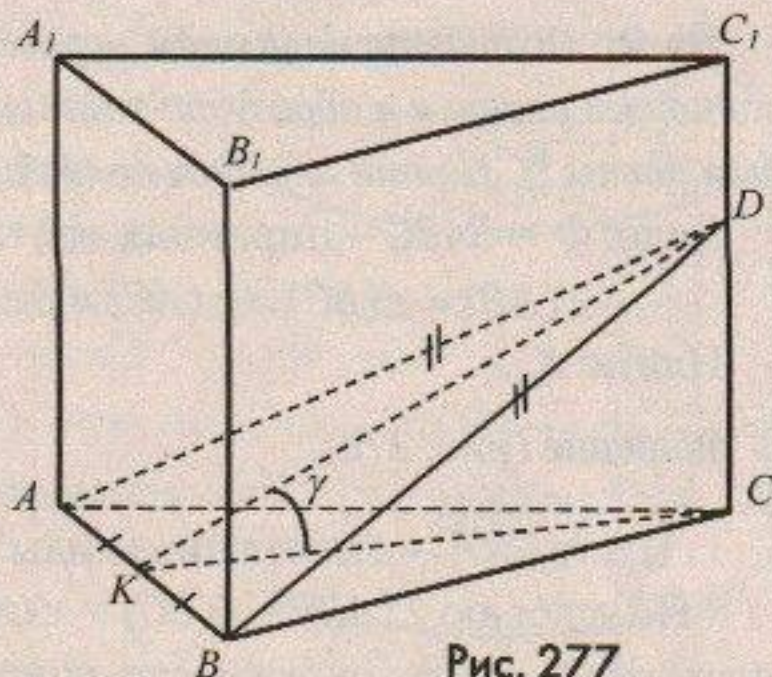


Рис. 277

№ 2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a и образуют угол α ; двугранные углы при всех сторонах основания равны β . Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Дано: $\Phi = SABC$ — пирамида, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$;

$\angle(AB) = \angle(BC) = \angle(AC) = \beta$.

Найти: S_{Φ} .

Решение (рис. 278).

1) Пусть $[SO]$ — высота пирамиды.

По условию $\angle(AB) = \angle(BC) = \angle(AC)$, поэтому O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, значит O — точка пересечения биссектрис.

В $\triangle ABC$: $AB = BC$, следовательно, точка O принадлежит медиане к стороне AC .

2) Для вычисления S_{Φ} можно воспользоваться формулой площади боковой поверхности пирамиды, у которой все двугранные углы при основании равны

$$\beta: S_{\text{б.}\Phi} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta}.$$

Найдем площадь основания: $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin \alpha$, и тогда $S_{\text{б.}\Phi} = \frac{a^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos \beta}$.

Получим:

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha + \frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \beta} \right) = \frac{a^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}.$$

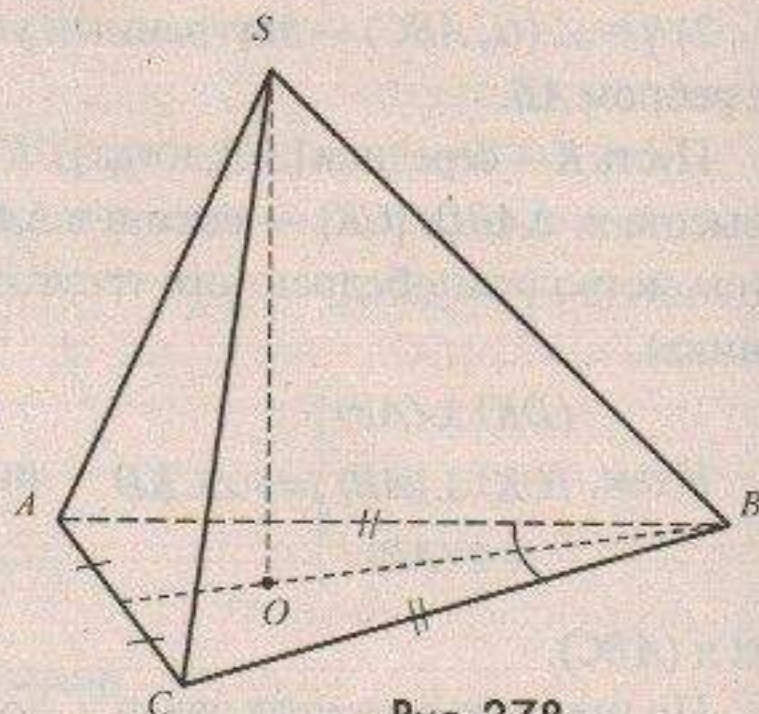


Рис. 278

№ 3. Радиус цилиндра R , высота H , площадь сечения, параллельного оси, равна S . На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?

Дано: $\Phi = OO_1$ — цилиндр, R — радиус, H — высота; α — секущая плоскость; $\alpha \parallel (OO_1)$; $F = \Phi \cap \alpha$; $S_F = S$.

Найти: $\rho(OO_1, \alpha)$.

Решение (рис. 279).

1) Пусть $F = ABCD$. Очевидно, что $ABCD$ — прямоугольник. Действительно, так как $\alpha \parallel (OO_1)$, то $(AD) \parallel (OO_1)$ и $(BC) \parallel (OO_1)$. Далее, $(DC) \parallel (AB)$ (по теореме о пересечении параллельных плоскостей третьей плоскостью).

Итак, $ABCD$ — параллелограмм.

Поскольку $(AD) \perp (AB)$ (определение прямого цилиндра), то $ABCD$ — прямоугольник.

2) Пусть $\rho(OO_1, \alpha) = x$.

Проведем перпендикуляр из точки O на плоскость α . Пусть $[OK] \perp (CD)$, $K \in (CD)$. По теореме 2 из 3.1 $[OK]$ — перпендикуляр, проведенный в одной из перпендикулярных плоскостей к линии их пересечения, является перпендикуляром к другой плоскости. Итак, $[OK] \perp \alpha$, поэтому $x = OK$.

1) Из $\triangle ODK$: $x = \sqrt{R^2 - DK^2}$, где $DK = \frac{1}{2}CD$. Находим: $CD = \frac{S}{H}$, и тогда

$$x = \sqrt{R^2 - \frac{S^2}{4H^2}}.$$

№ 4. Радиус основания конуса R , угол наклона образующей к плоскости основания α . Плоскость проходит через вершину конуса и пересекает основание под углом φ . Найти площадь сечения.

Решение.

Пусть $\Phi = SO$ — данный конус (рис. 280), $[SA]$ — образующая, Π — плоскость основания конуса, S — секущая плоскость.

1) $\angle(SA, \Pi) = \alpha$, (SA) — наклонная к Π , $(OA) = \text{пр}_{\Pi}(SA)$, поэтому $\angle SAO$ — угол прямой (SA) с плоскостью Π и $\angle SAO = \alpha$.

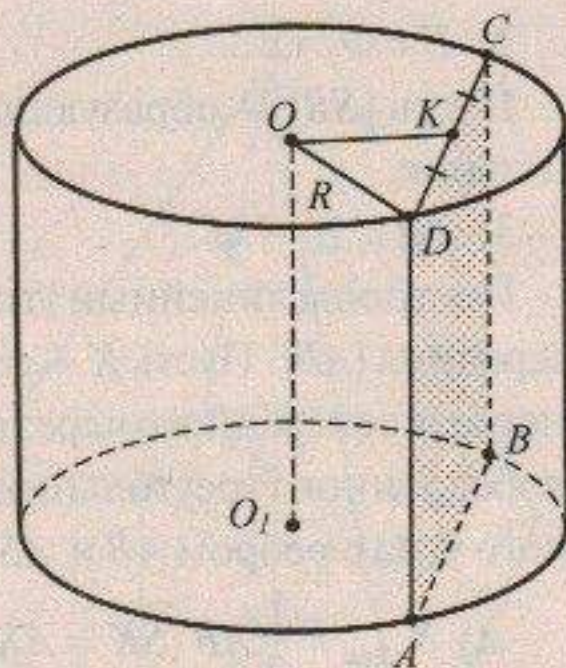


Рис. 279

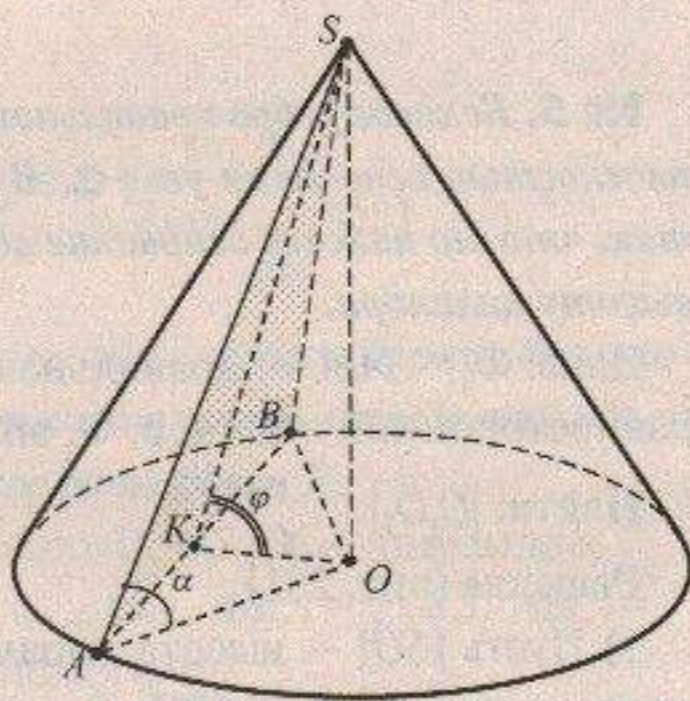


Рис. 280

$$2) F = \Phi \cap \Sigma.$$

Пусть $[SB]$ — образующая конуса, тогда $\Delta SAB = F$ — равнобедренный треугольник.

$$3) \angle(\Pi, \Sigma) = \varphi.$$

Построим линейный угол двугранного угла двух плоскостей Π и Σ . Пусть K — середина $[AB]$. Пусть K — середина $[AB]$, тогда имеем: $(OK) \perp (AB)$ (свойство диаметра, проведенного через середину хорды) и $(SK) \perp (AB)$ (свойство медианы равнобедренного треугольника), следовательно, $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB и $\angle SKO = \varphi$.

$$4) S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SK = AK \cdot SK.$$

$$\text{Из } \Delta SAO: SO = R \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Из } \Delta SKO: OK = \frac{SO}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{R \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}; \quad SK = \frac{SO}{\sin \varphi} = \frac{R \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi}.$$

$$\text{Из } \Delta AOK: AK = \sqrt{R^2 - OK^2}; \quad AK = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} = R \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \varphi},$$

$$\text{и тогда } S_{\Delta SAB} = R \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{R \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi}.$$

№ 5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол α . В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найти высоту цилиндра.

Дано: $\Phi_1 = SABC$ — правильная пирамида, $SA = a$, $\angle(SA, ABC) = \alpha$; $\Phi_2 = O_1O_2$ — равносторонний цилиндр, Φ_2 вписан в Φ_1 .

Найти: $|O_1O_2|$.

Решение (рис. 281).

1) Пусть $[SO]$ — высота пирамиды и $\Delta A_1B_1C_1$ — сечение пирамиды плоскостью, параллельной (ABC) , O_1 — центр окружности, вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$.

Имеем: $\begin{cases} (O_1O_2) \perp (A_1B_1C_1) \\ (SO) \perp (A_1B_1C_1) \end{cases}$, откуда сле-

дует, что прямые SO и O_1O_2 совпадают как два перпендикуляра к одной плоскости, проходящие через одну точку O_1 .

Таким образом, высоты пирамиды и цилиндра лежат на одной прямой, а следовательно, их основания — точки O и O_2 — совпадают.

2) $\angle(SA, ABC) = \alpha$.

(SA) — наклонная к (ABC) ,

$(AO) = \text{пр.}_{(ABC)}(SA)$, следовательно,

$\angle SAO$ — угол прямой (SA) с плоскостью ABC .

3) Пусть $OO_1 = x$.

Из $\triangle SOA$: $OA = a \cdot \cos \alpha$, $SO = a \cdot \sin \alpha$. Из подобия $\triangle SO_1A_1$ и $\triangle SOA$: $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA}$

(1). Отсюда $SO_1 = SO - x = a \cdot \sin \alpha - x$. Далее O_1A_1 — это удвоенный радиус основания цилиндра, а он равен высоте (цилиндр равносторонний), поэтому $O_1A_1 = x$.

Равенство (1) примет вид:

$$\frac{a \cdot \sin \alpha - x}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{x}{a \cdot \cos \alpha}, \text{ откуда } x = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ)}.$$

№ 6. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ . Определить объем этой пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R .

Дано: $\Phi_1 = \Omega(O, R)$ — шар, R — данный отрезок; $\Phi_2 = SABC$ — пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, $\angle(AC, BD) = \alpha$, $\angle(SA, ABC) = \angle(SB, ABC) = \angle(SC, ABC) = \angle(SD, ABC) = \varphi$; Φ_2 вписана в Φ_1 .

Найти: V_{Φ_2} .

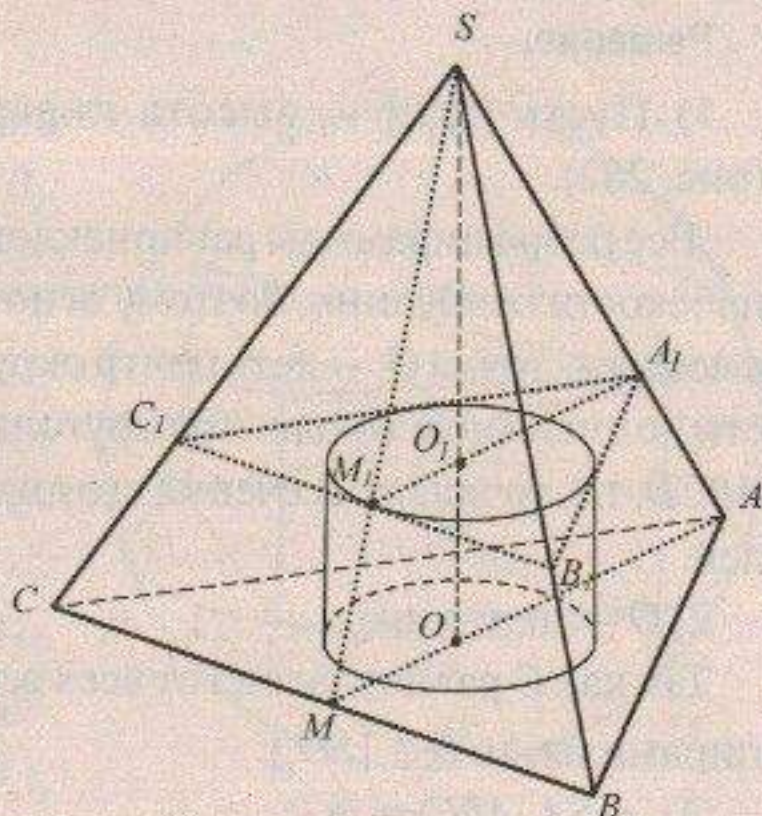


Рис. 281

Решение.

1) Пусть $[SO_1]$ — высота пирамиды (рис. 282).

Все ребра пирамиды равнонаклонны к плоскости основания, поэтому основание высоты — точка O_1 — есть центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, т.е. точка пересечения его диагоналей.

2) O — центр шара.

Так как O равноудалена от всех вершин пирамиды, то $O \in [SO_1]$.

3) $\angle(SA, ABC) = \varphi$.

Обоснование стандартное.

$$\angle SAO_1 = \angle SBO_1 = \angle SCO_1 = \angle SDO_1 = \varphi.$$

$$4) V_{\Phi_2} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO_1.$$

Пусть F — середина $[SA]$.

Из $\triangle SFO$ ($\angle SFO = 90^\circ$, $OS = R$, $\angle OSF = 90^\circ - \varphi$) находим SF :

$$SF = R \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = R \cdot \sin \varphi; \text{ тогда } SB = 2SF = 2R \cdot \sin \varphi.$$

$$\text{Из } \triangle SAO_1: SO_1 = SA \cdot \sin \varphi = 2R \cdot \sin^2 \varphi;$$

$$AO_1 = SA \cdot \cos \varphi = 2R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = R \cdot \sin 2\varphi.$$

$$\text{Находим } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (2AO_1)^2 \cdot \sin \alpha = 2AO_1^2 \cdot \sin \alpha = 2R^2 \cdot \sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Находим объем: } V_{\Phi_2} = \frac{4}{3} R^3 \cdot \sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin^2 \varphi.$$

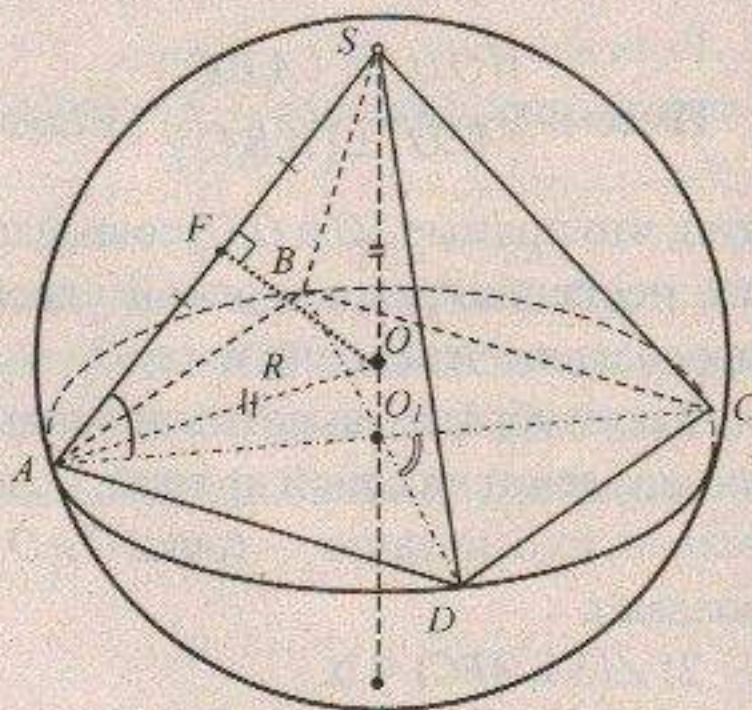


Рис. 282

№ 7. Прямая призма, основание которой — прямоугольный треугольник с катетами a и b , вписана в шар. Найти высоту призмы, если радиус шара равен R .

Дано: $\Phi_1 = ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$;

$\Phi_2 = \Omega(O, R)$ — шар, R — данный отрезок, Φ_1 вписана в Φ_2 .

Найти: AA_1 .

Решение (рис. 283).

1) O — центр шара $\Omega(O, R)$. W описан около призмы, следовательно, точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 принадлежат шаровой поверхности, т.е. они равноудалены от точки O .

Имеем:

а) $OA = OB = OC$. Таким свойством обладают все точки прямой p , перпендикулярной плоскости (ABC) и проходящей через точку Q_1 — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. Но $\angle C$ — прямой, поэтому Q_1 — середина $[AB]$. Далее, поскольку призма прямая, то $(ABC) \perp (ABB_1)$, и тогда $p \subset (ABB_1)$. Итак, $O \in p$, $Q_1 \in p$, Q_1 — середина $[AB]$ и $p \subset (ABB_1)$;

б) $OA_1 = OB_1 = OA = OB$. Таким свойством в прямоугольнике AA_1B_1B обладает его центр. Итак, O — центр прямоугольника AA_1B_1B .

2) Из $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\text{Из } \triangle OQ_1B: OQ_1 = \sqrt{OB^2 - Q_1B^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - a^2 - b^2}.$$

$$\text{Находим } AA_1 = 2OQ_1 = \sqrt{4R^2 - a^2 - b^2}.$$

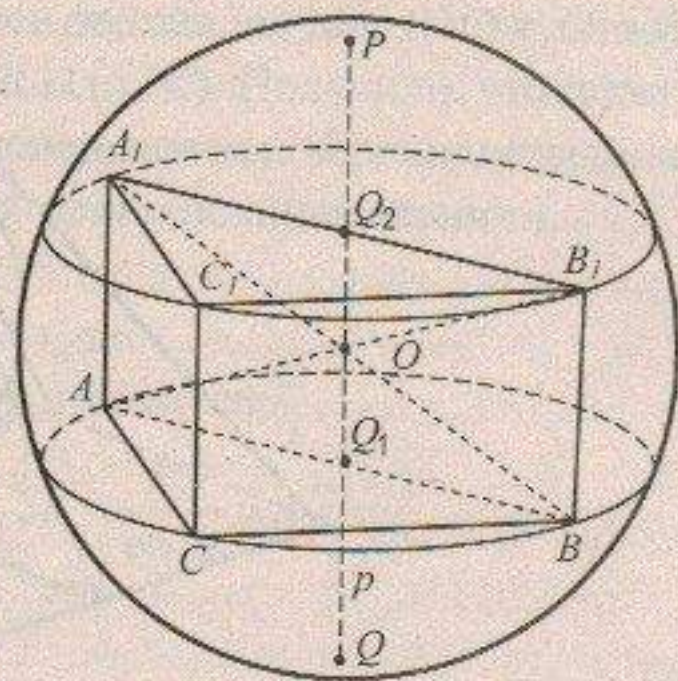


Рис. 283

№ 8. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a , двугранный угол при основании равен α . Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Дано: $\Phi_1 = SABCD$ — правильная пирамида, $\angle(AB) = \alpha$;

$\Phi_2 = \Omega(O, R)$ — шар, $SO = a$; Φ_2 вписан в Φ_1 .

Найти: S_{Φ_1} .

Решение (рис. 284).

1) $[SQ]$ — высота пирамиды. Пирамида правильная, поэтому Q — центр квадрата $ABCD$.

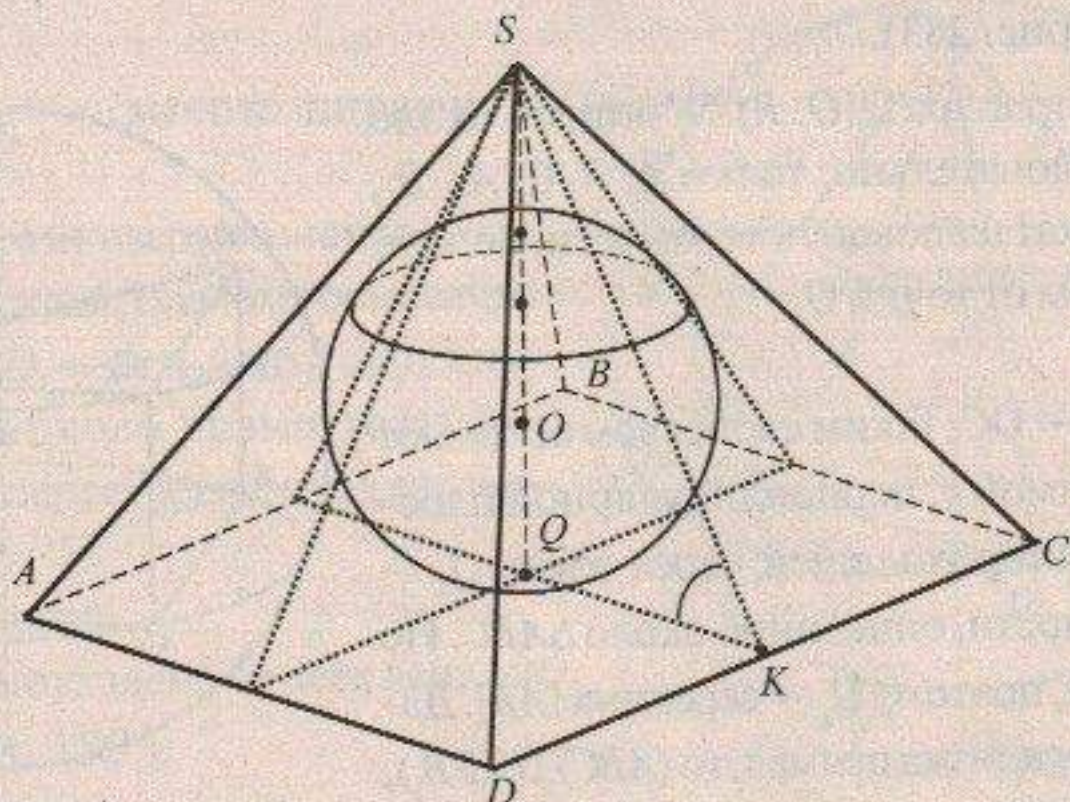


Рис. 284

2) $\angle(AB) = \alpha$.

Пусть K — середина $[CD]$, тогда

$(QK) \perp (CD)$ — свойство квадрата

$(SK) \perp (CD)$ — свойство равнобедренного треугольника

$\Rightarrow \angle SKQ$ — линей-

ный угол двугранного угла с ребром (CD) , т.е. $\angle SKQ = \alpha$.

3) O — центр шара.

Докажем, что $O \in [SQ]$.

В треугольник SQK впишем полукруг QLP (рис. 285), центр которого (точка пересечения $[SQ]$ биссектрисой $\angle SKQ$) принадлежит $[SQ]$, а дуга касается $[SK]$ и $[QK]$; $OL = OQ$ — радиус этого полукруга.

При вращении этого полукруга вокруг диаметра $[PQ]$ получим шар. Докажем, что этот шар вписан в пирамиду.

Действительно, плоскость (ABC) — касательная к шару в точке Q , так как $(OQ) \perp (ABC)$ и $Q \in (ABC)$. Каждая боковая грань пирамиды также является касательной плоскостью к шару. Докажем, например, для (SDC) .

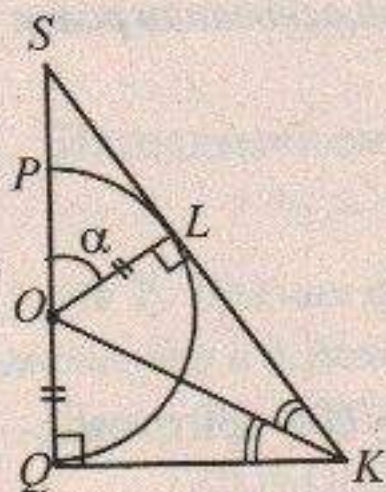


Рис. 285

Имеем: $(SQK) \perp (SDC)$ (по признаку перпендикулярности плоскостей, т.к. $(CD) \perp (SQK)$), и в одной из них, в (SQK) , проведен перпендикуляр (OL) к линии их пересечения — (SK) . По теореме 2 из 3.1: $(OL) \perp (SDC)$. Получили, что плоскость (SDC) проходит через точку L шаровой поверхности и перпендикулярна радиусу OL , т.е. она является касательной плоскостью (по определению).

$$4) S_{\Phi_1} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок. пов.}}$$

$$\text{Из } \triangle SOL: R = a \cdot \cos \alpha. \text{ Из } \triangle OKQ: KQ = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\text{осн.}} = (2QK)^2 = 4a^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}. \text{ Из } \triangle SQK: SK = \frac{KQ}{\cos \alpha} = a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\triangle SDC} = \frac{1}{2} CD \cdot SK = KQ \cdot SK = a^2 \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\text{бок. пов.}} = 4a^2 \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_{\Phi_1} &= 4a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (\cos \alpha + \cos^2 \alpha) = 4a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha) = \\ &= 4a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 8a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

№ 9. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим острым углом α . Найти объем шара, вписанного в призму.

Дано: $\Phi_1 = ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ABC = 90^\circ$, $BC = a$;

$\angle CAB = \alpha$; $\Phi_2 = \Omega(O, r)$ — шар, Φ_2 вписан в Φ_1 .

Найти: V_{Φ_2} .

Решение (рис. 286).

1) Пусть O — центр шара. Докажем, что $O \in [PQ]$ — отрезку, соединяющему центры P, Q вписанных в основания окружностей. Пусть $[PS] \perp [B_1C_1]$, $S \in [B_1C_1]$ и $[QR] \perp [BC]$ и $RO \perp [BC]$.

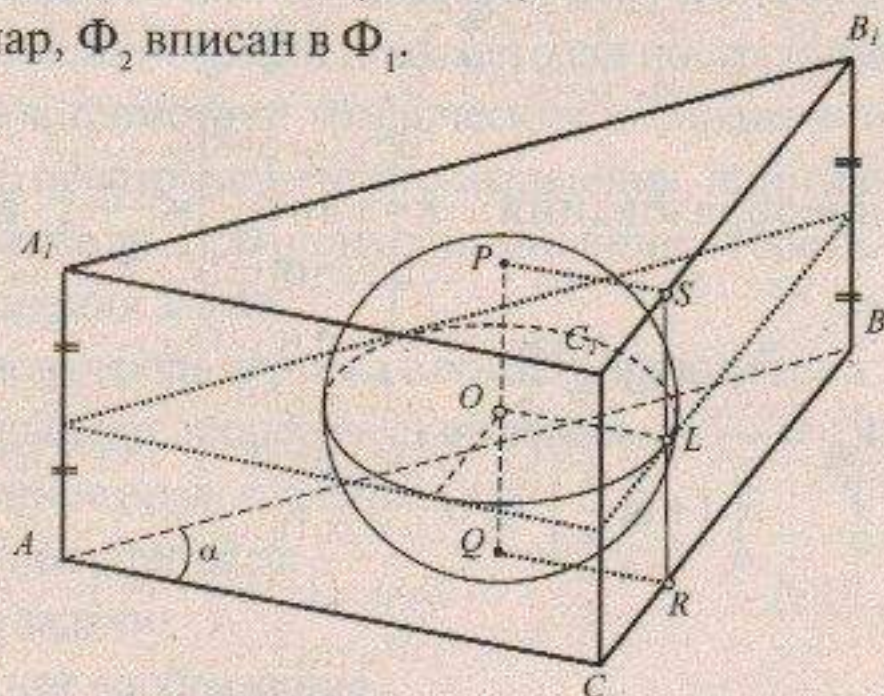


Рис. 286

В прямоугольник $PQRS$ впишем полуокруг (рис. 287), центр которого — $O \in [PQ]$ и радиус которого — r . При вращении полуокруга вокруг оси PQ получим шар $\Omega(O, r)$.

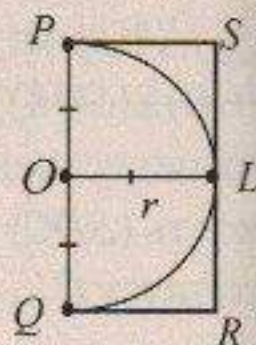


Рис. 287

Докажем, что шар вписан в призму Φ_1 .

Действительно, плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ — касательные к шару, поскольку $[OQ] \perp (ABC)$ и $[OP] \perp (A_1B_1C_1)$.

Далее, $(PQR) \perp (BB_1C_1)$, плоскость (PQR) содержит перпендикуляр $[PS]$ к плоскости (BB_1C_1) , поэтому радиус $[OL]$ шара, проведенный перпендикулярно $[SR]$, будет перпендикулярен и плоскости (BB_1C_1) (теорема 2 из 3.1). Итак, (BB_1C_1) — касательная к шару в точке K .

Если провести из точки P два других перпендикуляра к сторонам $[A_1B_1]$ и $[A_1C_1]$ верхнего основания и рассмотреть полученные прямоугольники, то все они будут равными, следовательно, и плоскости (AA_1B_1) , (AA_1C_1) — касательные к шару.

$$2) V_{\Phi_2} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Радиус шара найдем из $\triangle ABC$ (рис. 288). Здесь Q — точка пересечения биссектрис, $[QK] \perp [AB]$, $[QR] \perp [BC]$ и $QK = QR = r$.

$$\text{Из } \triangle ABC: AB = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{Из } \triangle AQC: AK = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ но поскольку } KB = AB - AK, \text{ то } r = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \text{ или после}$$

$$\text{преобразований: } r \cdot \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ откуда } r = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha}, \text{ и тогда}$$

$$V_{\Phi_2} = \frac{4\pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{3 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие наукоемких и высокотехнологичных производств требует привлечения в эти сферы работников, обладающих хорошо развитым пространственным воображением. Все больше выпускников школ выбирают инженерно-технические специальности, направления технического сервисного обслуживания, требующие знаний графического языка. Графический язык все чаще становится языком делового общения, принятым в науке, технике, искусстве. Чертежи составляют основу паспортов и документов, инструкций и технических описаний, без них не обходится ни одно производство. В технике чертеж является основным средством воплощения человеческих идей, и овладеть им должен не только инженер, строитель, конструктор, но и каждый квалифицированный рабочий.

Одной из задач школьного образования является обеспечение должного уровня графической подготовки выпускников. В связи с этим возрастает роль курса геометрии, который имеет потенциальные возможности развития пространственных представлений, формирования конструктивных умений и навыков. Изучение трехмерных образов в стереометрии дает возможность получения знаний о способах отображения информации, о различных методах построения изображений фигур. Использование в геометрии графических изображений может способствовать формированию пространственного мышления, пониманию и усвоению теоретических рассуждений, прочному запоминанию теоретических фактов и отысканию путей решения задач.

Профессор Н.Ф. Четверухин обосновал роль чертежа в обучении геометрии:

- 1) чертеж облегчает понимание и усвоение теоретических выводов;
- 2) чертеж формирует пространственное представление;
- 3) чертеж способствует запоминанию материала;
- 4) чертеж помогает найти решение задачи;
- 5) чертеж развивает пространственное воображение.

Решение любой геометрической задачи предполагает построение чертежа, выполненного по четким правилам и с помощью чертежных инструментов. Выполнить правильный и точный чертеж можно, только имея прочные знания о способах изображений фигур, а также владея навыками работы с чертежными инструментами. Большие сложности теоретического и технического характера возникают, как правило, при выполнении чертежей пространственной фигуры, что обусловлено объективными причинами: на таких чертежах не сохраняются меры углов и длины отрезков оригинала, могут пересекаться линии, не имеющие в оригинале общих точек.

В начертательной геометрии разработаны различные методы изображения пространственных фигур: параллельное, ортогональное и центральное проектирование; аксонометрия; метод Монжа. Однако единого способа изображения пространственных фигур, пригодного на все случаи жизни, указать невозможно, поскольку его выбор обусловлен многими факторами и зависит, в итоге, от конечной цели. Профессор Н.Ф. Четверухин доказал целесообразность и эффективность применения произвольной параллельной проекции в обучении геометрии в школе.

В книге раскрыты основы параллельного проектирования, описаны алгоритмы построения изображений плоских и пространственных фигур, предложены приемы обоснования выполнения чертежей, приведены примеры решения стереометрических задач на проекционном чертеже. Особое внимание уделено описанию методов построения сечений многогранников, с применением так называемых основных позиционных задач, на высоком научном уровне.

Книга позволяет приобрести навыки работы с проекционным чертежом для решения стереометрической задачи на вычисление, а также успешно подготовиться к Единому государственному экзамену в школе. Изучение техники параллельного проектирования помогает использовать её элементы в будущей практической деятельности, расширяет общетехнический и научный кругозор читателя. Изучение способов изображения трехмерных объектов на плоскости помогает развитию пространственного мышления и формированию приемов исследования геометрических свойств изображенного объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для ун-тов. / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецве-таев. — М.: Наука, 1990. — 672 с.
2. Александров А.Д. Стереометрия. Геометрия в пространстве. [Текст]: библиотека школьника / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. — М.: Висагинас, ALFA, 1998. — 576 с.
3. Александров А.Д. Геометрия. 11 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. изуче-нием математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2005. — 264 с.
4. Александров А.Д. Геометрия. 10 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. изуче-нием математики / А.Д. Александров. — М.: Просвещение, 2006. — 278 с.
5. Александров А.Д. Геометрия. 10–11 кл. [Текст]: базовый и профильный уровни / А.Д. Алексан-дров. — М.: Просвещение, 2006. — 398 с.
6. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учеб. пособие для ун-тов / П.С. Александров. — М.: Наука, 1979. — 398 с.
7. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии [Текст]: учеб. пособие для ун-тов / П.С. Александров. — М.: Наука, 1965. — 356 с.
8. Аленицын А.Г. Краткий физико-математический справочник [Текст] / А.Г. Аленицын. — М.: Наука, 1999. — 126 с.
9. Атанасян Л.С. Геометрия [Текст]. В 2 ч. Ч. 1. / Л.С. Атанасян. — М.: Просвещение, 1973. — 480 с.
10. Атанасян Л.С. Геометрия [Текст]. В 2 ч. Ч. 1. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. — М.: Просвещение, 1986. — 336 с.
11. Атанасян Л.С. Геометрия [Текст] В 2 ч. Ч. 2. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. — М.: Просвещение, 1986. — 312 с.
12. Атанасян Л.С. Геометрия [Текст]. В 2 ч. Ч. 2. / Л.С. Атанасян, Г.Б. Гуревич — М.: Просвещение, 1976. — 447 с.
13. Атанасян Л.С. Аналитическая геометрия [Текст] / Л.С. Атанасян. Ч. 2. / Л.С. Атанасян. — М.: Просвещение, 1967. — 299 с.
14. Атанасян Л.С. Сборник задач по геометрии: учеб. пособие для пед. ин-тов [Текст] / Л.С. Атана-сян, В.А. Атанасян. — М.: Просвещение, 1973. — 256 с.
15. Баврин И.Н. Высшая математика [Текст]: учеб. пособие / И.Н. Баврин, В.Л. Матросов. — М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2002. — 400 с.
16. Базылев В.Т. Геометрия [Текст] учеб. пособие для пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2. / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев. — М.: Просвещение, 1975. — 367 с.
17. Базылев В.Т. Сборник задач по геометрии [Текст]: учеб. пособие для пед. ин-тов. / В.Т. Базылев., К. И. Дуничев. — М.: Просвещение, 1976. — 447 с.
18. Бакельман И.Я. Высшая геометрия [Текст]: учеб. пособие / И.Я. Бакельман. — М., Просвеще-ние, 1967. — 289 с.
19. Бакин Р.А. Методика формирования пространственного образа при помощи компьютерной ани-мации [Текст]: диплом / Р. А. Бакин. — Киров, 2005.
20. Беклемшинева А.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст]: А.А. Беклемшинева. — М.: Наука, 1987. — 216 с.
21. Бобровская А.В. Аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие для студентов 1 курса [Текст]: / А.В. Бобровская, О.И. Чикунова. — Шадринск, 2008. — 92 с.
22. Бобровская А.В. Обучение методу математического моделирования средствами курса геометрии педагогического института: Дис. канд. пед. наук [Текст]: / А.В. Бобровская — СПб., 1996. — 232 с.
23. Бубенков А.В. Начертательная геометрия [Текст]: / А.В. Бубенков., М.Я. Громов. — М., 2000. — 220 с.

24. Богомолов С.А. Геометрия [Текст]: / С.А. Богомолов. — Л.: Госучпедиздат, 1949. — 342 с.
25. Бугров Я.С. Высшая математика. В 2 т. Т. 2. [Текст]: / Я.С. Бугров, С.М. Никольский — Том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Дрофа, 2004. — 288 с.
26. Веннинджер М. Модели многогранников [Текст]: / М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974. — 11 с.
27. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Текст]: / М. Я. Выгодский. — М.: АСТ, 2006. — 509 с.
28. Геометрия [Текст]: Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. — М.: Просвещение, 2001. — 271 с.
29. Геометрия. 10–11 кл. [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Погорелов А.В. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1991. — 384 с.
30. Геометрия: учебник для 7–9 классов средней школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцева и др. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1992. — 335 с.
31. Готман Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения [Текст] / Э.Г. Готман. — М.: МЦНМО, 2006. — 160 с.
32. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Текст] / Е.И. Гурский. — Мн.: Выш. школа, 1982. — 272 с.
33. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии [Текст]: учебн. пособие / Н.В. Ефимов. — 13-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 240 с.
34. Зеленина Н.А. Заключительный этап решения геометрических задач в основной школе [Текст]: диссертация на соискание ученой степени кандидата пед. наук / Н. А. Зеленина. — Киров, 2004. — 158 с.
35. Ильин В.А. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник для вузов. / В.А.Ильин. — М.: Наука, 2003. — 254 с.
36. Киселев А.П. Геометрия [Текст] / под ред. Н.А. Бяголева / А.П. Киселев. — М.: ФИЗМАЛТИТ, 2004. — 328 с.
37. Клайн М. Геометрия [Текст] / Математика в современном мире. — М.: Наука, 1964. — 344с.
38. Королев Ю.И. Начертательная геометрия [Текст]: учебник для вузов / Ю.И. Королев. — Питер-Юг, 2010. — 328 с.
39. Литвиненко В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: Книга для учителя [Текст] / В.Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1991. — 188 с.
40. Литвиненко В.Н. Практикум по решению задач школьной математики. Выпуск IV. Геометрия. / В.Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1982. — 344 с.
41. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике. Стереометрия [Текст]: учебное пособие. [Текст] / В.Н. Литвиненко. — М.: Вербум-М, 2000 г. — 388 с.
42. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика. [Текст] / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. — М.: Просвещение, 1987. — 346 с.
43. Методические рекомендации к курсу геометрии 9–10 классов (по пробным учебникам Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Поздняка) [Текст] / под ред. Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова. — М.: Просвещение, 1989. — 128 с.
44. Моденов П.С. Аналитическая геометрия [Текст]: учебн. пособие / П.С. Моденов. — М.: Изд-во МГУ, 1969. — 699 с.
45. Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебн. пособие / П.С. Моденов., А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 298 с.
46. Морозова Е.А. Аналитическая геометрия [Текст]: методическое пособие / Е.А Морозова, Е.Г Склиаренко. — М., 2004. — 103 с.
47. Мухелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии [Текст] / Н.И. Мухелишвили. — 4-е изд. — М.: Высшая школа, 1967. — 148 с.
48. Панкратов А.А. Начертательная геометрия [Текст]: учебн. пособие / А.А. Панкратов. 2-е изд. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1963. — 218 с.

49. Повышение эффективности обучения математике в школе [Текст]: кн. для учителя: из опыта работы / Г. Д. Глейзер. — М.: Просвещение, 1989. — 240 с.
50. Погорелов А. В. Геометрия [Текст]: учебник для 7–11 кл. средней школы / А. В. Погорелов. — М.: Просвещение, 1991. — 246 с.
51. Погорелов А. В. Геометрия [Текст] / А. В. Погорелов. — М.: Наука; гл. редакция физико-математический литературы, 1984. — 346 с.
52. Постников М. М. Аналитическая геометрия [Текст] / М. М. Постников — М.: Техника, 2004. — 348 с.
53. Потоскуев Е. В. Геометрия. 10 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. Учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — М.: Дрофа, 2003. — 224 с.
54. Преподавание геометрии в 9–10 классе. Сборник статей. Сост. Скопец З. А., Хабиб Р. А. — М.: Просвещение, 1980.
55. Сборник задач по геометрии [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. инт.-ов, ч. II / Атанасян Л. С. [и др.]. — М.: Просвещение, 1975. — 176 с.
56. Сборник задач по геометрии [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. инт.-ов / Базылев В. Т. [и др.]. — М.: Просвещение, 1980. — 238 с.
57. Соболев А. Б. Аналитическая геометрия в пространстве [Текст]: учеб. пособие / А. Б. Соболев, М. А. Вигура, А. Ф. Рыбалко, Н. М. Рыбалко. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. — 221 с.
58. Чекмарев А. А. Начертательная геометрия и черчение [Текст]: учебник для вузов / А. А. Чекмарев. — М.: Инфра-М, 2009. — 328 с.
59. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже [Текст]: / Н. Ф. Четверухин. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1952. — 127 с.
60. Четверухин Н. Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии [Текст]: / Н. Ф. Четверухин. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство наркомпроса РСФСР, 1946. — 194 с.
61. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 10–11 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. изучением математики / И. Ф. Шарыгин. — М.: Дрофа, 2008. — 264 с.
62. Шипачев В. С. Аналитическая геометрия: Метод координат, решение геометрических задач с помощью алгебры [Текст]: учебное пособие для средней школы / В. С. Шипачев. — М.: Аквариум, 1997. — 256 с.
63. Фридман Л. М. Наглядность и моделирование в обучения [Текст]: кн. для учителя / Л. М. Фридман. — М.: Знание, 1984. — 80 с.
64. Фролов С. А. Начертательная геометрия [Текст] / С. А. Фролов. — М.: Просвещение, 1999. — 137 с.
65. Якиманская И. С. Психологические основы математического образования [Текст]: учебное пособие / И. С. Якиманская. — М.: Академия, 2004. — 320 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ	5
1.1. Основы теории параллельного проектирования	5
1.2. Изображение плоских фигур	6
1.3. Изображение пространственных фигур	11
1.3.1. Призма	11
1.3.2. Пирамида	11
1.3.3. Цилиндр	16
1.3.4. Конус	16
1.3.5. Шар	20
1.3.6. Комбинации цилиндра с многогранниками	20
1.3.7. Комбинации конуса с многогранниками	26
1.3.8. Описанный шар	31
1.3.9. Вписанный шар	31
 Глава 2. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ НА ПОЛНЫХ И НЕПОЛНЫХ ЧЕРТЕЖАХ	 42
2.1. Позиционная задача, полные и неполные изображения	42
2.2. Основные позиционные задачи	46
2.3. Элементарные способы построения сечений многогранников	54
2.3.1. Аксиоматический подход к построению стереометрии	54
2.3.2. Аксиомы и теоремы стереометрии в построении сечений многогранников	59
2.3.3. Параллельность прямых и плоскостей в построении сечений многогранников	68
2.4. Построение сечений многогранников на полных чертежах	76
2.4.1. Метод «следа секущей плоскости»	77
2.4.2. Метод «внутреннего проектирования»	81

Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ НА ПОЛНОМ ЧЕРТЕЖЕ	87
3.1. Высота многогранника	87
3.2. Угол прямой с плоскостью	94
3.3. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла	97
3.4. Форма граней и сечений многогранников	102
3.5. Перпендикуляр из точки к прямой и плоскости в пространстве	110
3.5.1. Перпендикуляр из точки к прямой в пространстве	110
3.5.2. Перпендикуляр из точки к плоскости	112
3.5.3. Расстояние от прямой до плоскости	114
3.6. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых	115
3.7. Комбинации многогранников и круглых тел	120
3.7.1. Комбинации цилиндра с многогранниками	120
3.7.2. Комбинации конуса с многогранниками	122
3.7.3. Шар, описанный около многогранников и круглых тел	125
3.7.4. Вписанный шар	129
3.7.5. Нестандартные комбинации многогранников и круглых тел ..	140
3.7.6. Вычисление элементов многогранников и круглых тел на полных чертежах	150
Заключение	161
Список литературы	163

Вы можете купить любую книгу издательства
Феникс по самым низким ценам



в интернет-магазине
www.phoenixbooks.ru

Для некоторых книг доступен он-лайн просмотр
отдельных глав, разделов и содержания
на страницах сайта **www.phoenixbooks.ru**

Тел. 8(928)622-87-04 E-mail:

myphoenixbooks@gmail.com Сайт:

www.phoenixbooks.ru

Оплата — денежный перевод или электронный платеж.
доставка — почтой России или самовывоз из Ростова-на-Дону.